最適参入問題における最適指値政策について

中　川　裕　司

1. はじめに
2. 最適停止問題としての基本モデル
3. 最適指数問題への変換
4. 比較静学
5. 数 値 例
6. おわりに

1. はじめに

2011 年 3 月 11 日に東日本大震災を経験し，企業も直接多大な被害を受け，1 ドル 70～80 円台の超円高，さらに原発停止による節電から，特に日本の製造企業のコストが増大しプラントの一部あるいは全部の海外移転が模索されている。本稿では，国外で現地通貨を使って投資と生産を行い，その国以外の第三国に輸出して販売する参入オプション問題を想定する。そのとき，邦人企業は時間とともに確率的に変動する幾何ブラウン運動に従う投資額と生産額と売上額に対する各国為替レートのリスクに直面する。この企業の事業のプロジェクトライフは無限であると考え，一旦参入すると，それ以降，無限期間，常に販売額と生産のための費用リスクに直面して連続的にキャッシュフローが得られるものと想定する。

その際，主流である確率微分方程式によるオプションモデルの解法以外のラプラス変換を使った最適停止時刻問題から最適指値問題へのより簡便な解法を紹介する。この解法によって，状態変数が幾何ブラウン運動に従うときの参入・撤退・停止・再開・スイッチング・複合オプションなどの価値を求めることができ，微分方程式を使ったリアルオプションモデルの解法よりも簡便であるという特徴を持っている。また，微分方程式による解法の際に必要な境界条件は，このラプラス変換による解法の場合には最適化問題の解析的性質として得られる。

2 節では本稿で考察する基本モデルを設定し，初期条件とバリューマッチング（価値対等）条件とスムースペイスティング（滑らかな張り合わせ）条件の 3 つの境界条件を使用して微分方程式による解法を導出し，3 節では，ドリフト付き幾何ブラウン運動の初到達時刻にラプラス変換を使うことによって最適停止時刻問題から最適指値問題への解法を考察して，解法が容易であることを示す。この解法によって，初期条件とバリューマッチング条件とスムースペイスティング条件は微分方程式の解法による境界条件として満たさなければならない条件ではなく，これら 3 条件を包含することを明らかにする。4 節では投資実行時あるいはプロジェクト価値の不確実性

に関する比較静学を考え，最後に，数値例を用いてシミュレーションを行う。

2. 最適停止問題としての基本モデル

参入オプションの枠組みにおけるプロジェクト価値は投資実行時 τ から無限期間の事業まで，連続的にキャッシュフロー C が得られるものと想定して(1)とする。

$$C(x,y,i,b,s)=\sup_{\tau\geq 0} E^{x}\left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-rt}\left(\pi\left(X_t\right)Y_t - I_t S_t\right)dt - e^{-r\tau}B_\tau S_\tau\right] \tag{1}$$

ここで，τ は投資実行時点を表す停止時刻，X_t は時点 t での生産量，$\pi(X_t)$ は生産量 X_t にたいする売上額，Y_t は時点 t での日本円/販売国為替レート，I_t は時点 t での可変費用，B_τ は投資実行時点 τ での投資額，S_t は時点 t での日本円/生産国為替レートである。$X_0=x$，$Y_0=y$，$I_0=i$，$S_0=s$ とし，E^x は時刻 $t=0$ での x に対する条件付き期待値，r はリスク調整済み割引率である。さらに，これらの状態変数は(2)の幾何ブラウン運動に従うと仮定する[1)]。

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu_x X_t dt + \sigma_x X_t dz_t^x, \quad & dI_t &= \mu_i I_t dt + \sigma_i I_t dz_t^i, \\ dY_t &= \mu_y Y_t dt + \sigma_y Y_t dz_t^y, \quad & dS_t &= \mu_s S_t dt + \sigma_s S_t dz_t^s, \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，μ_x，μ_y，μ_i，μ_s，σ_x，σ_y，σ_i，σ_s は定数で，Z_t^i は標準ブラウン運動を表し，Z_t^j と Z_t^k の相関を ρ_{jk} とする。さらに，生産国通貨表示による売上額関数 $\pi(X_t)$ は(3)のコブダグラス型売上関数を仮定する。

$$\pi(x)=x^k, \qquad k\geq 1 \tag{3}$$

次に，時点 t での日本円表示の売上額 $\pi(X_t)Y_t$ に対する日本円表示の生産額（可変費用）I_tS_t を(4)のように変数変換する。

$$W_t = V_t \big/ U_t, \quad V_t=\pi(X_t)Y_t = x_t^k Y_t, \quad U_t = I_t S_t, \quad k\geq 1 \tag{4}$$

ここで，$W_0=w=v/u=\pi(x)y/(is)$ とする。(2)と(4)から，伊藤の公式より W_t の過程は(5)となる。

$$dW_t = \mu_w W_t dt + \sigma_w W_t dz_t^w \tag{5}$$

ただし，(6)とする。

$$\begin{aligned}&\mu_w \equiv \mu_v - \mu_u + \sigma_u^2 - \rho_{vu}\sigma_v\sigma_u, \qquad \mu_v \equiv k\mu_x + \mu_y, \qquad \mu_u \equiv \mu_i + \mu_s,\\&\rho_{vu}\sigma_v\sigma_u \equiv k\left(\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y - \rho_{xi}\sigma_x\sigma_i - \rho_{xs}\sigma_x\sigma_s\right) - \rho_{yi}\sigma_y\sigma_i - \rho_{ys}\sigma_y\sigma_s + \rho_{is}\sigma_i\sigma_s,\\&\sigma_w dz_t^w \equiv \sigma_v dz_t^v - \sigma_u dz_t^u, \qquad \sigma_u^2 \equiv k\left(k-1\right)\sigma_x^2 \big/ 2,\\&\sigma_v dz_t^v \equiv k\sigma_x dz_t^x + \sigma_y dz_t^y, \qquad \sigma_u dz_t^u \equiv \sigma_i dz_t^i + \sigma_s dz_t^s\end{aligned} \tag{6}$$

さらに，投資実行時点 τ の投資額 B_τ を(7)とする。

$$B_t = aI_t \qquad a \geq 0 \tag{7}$$

ここで，a は投資実行時点での生産額（可変費用）にたいする投資額（固定費用）の非負の比率とする。すなわち，a は B_τ を I_τ で計測した資本規模係数を意味する。

そのとき，価値関数(1)の左辺は(4)より(8)となる[2)]。

$$C\left(x, y, i, s, b\right) = uC\left(w, 1\right) = uf\left(w\right), \qquad f\left(w\right) = C\left(w, 1\right)\big/ u \tag{8}$$

ただし，$W_t = w$ と仮定した。

企業が投資を遅延する場合（続行領域）の $f(w)$ は(9)の常微分方程式を満たさなければならない[3)]。ただし，導出は補論 A で行う。

$$\frac{1}{2}\sigma_w^2 w^2 f_{ww}\left(w\right) + \mu_w w f_w\left(w\right) - \left(r-\mu_u\right)f\left(w\right) = 0 \tag{9}$$

(9)はオイラー型微分方程式であり，境界条件(10)を満たさなければならない。

(i) $\quad f\left(0\right) = 0$ 　（初期条件）　(10a)

(ii) $\quad f\left(w^*\right) = \dfrac{w^*}{r-\mu_v} - \left(a + \dfrac{1}{r-\mu_u}\right)$ 　（バリューマッチング条件）　(10b)

(iii) $\quad f'\left(w^*\right) = \dfrac{1}{r-\mu_v}$ 　（スムースペイスティング条件）　(10c)

ただし，w^* は投資実行の臨界値（閾値）を表す。(9)の微分方程式を解くと，以下の命題が得られる。

【命題 1】 独占企業が国外の現地通貨で投資・生産を行い，その国以外の第三国に輸出して販売する場合，プロジェクト価値は $C(x, y, i, s, b) = uf(w)$ で与えられ，$f(w)$ は(11)である。

$$f\left(w\right) = \begin{cases}\left(\dfrac{w}{w^*}\right)^\beta \left\{\dfrac{w^*}{r-\mu_v} - \left(a + \dfrac{1}{r-\mu_u}\right)\right\} & w < w^*\\ \dfrac{w}{r-\mu_v} - \left(a + \dfrac{1}{r-\mu_u}\right) & w \geq w^*\end{cases} \tag{11}$$

また，投資実行の臨界値（閾値）w^* は(12)である。

$$w^* = \frac{\beta\left(r-\mu_v\right)}{\beta-1}\left(a+\frac{1}{r-\mu_u}\right) \tag{12}$$

β は正の解(13)で与えられる。

$$\beta = \frac{1}{2}-\frac{\mu_w}{\sigma_w^2}+\sqrt{\left(\frac{\mu_w}{\sigma_w^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\left(r-\mu_u\right)}{\sigma_w^2}} \tag{13}$$

$w^*>0$ となる十分条件は $r>\mu_v>0$ かつ $r>\mu_u>0$ かつ $\beta>1$ となる[4)]。ここで，β は下式の特性方程式（characteristic equation）の正の解である。

$$Q\left(y\right) \equiv \sigma_w^2 y\left(y-1\right)/2+\mu_w y-\left(r-\mu_u\right)=0$$

上式から，$Q(0)=-(r-\mu_u)<0$，$Q(1)=\mu_w-(r-\mu_u)<0$ であるので，(14)でなければならない。

$$r>\mu_v+\mu_u \quad \text{かつ} \quad \mu_u, \mu_v>0 \quad \text{かつ} \quad \beta>1 \tag{14}$$

また，測度変換による解法は補論 B で行う。

3. 最適指数問題への変換

次に，ドリフト付き幾何ブラウン運動の初到達時刻にラプラス変換を使った最適停止時刻問題から最適指値問題への変換のために，次の命題を準備しておく。

【命題 2】 確率過程 G_t が幾何ブラウン運動(15)に従うとき[5)]，(16)が成立する。

$$dG_t=\mu G_t dt+\sigma G_t dz_t, \qquad G_0=g, \qquad \mu,\sigma>0 \tag{15}$$

このとき，$G_0=g$ を初期状態，$\tau(g_\tau)$ を $g_\tau>0$ への初到達時刻とする場合，このとき(16)が成立する。

$$E^g\left[e^{-\theta\tau\left(g_\tau\right)}\right]=\left(g/g_\tau\right)^\lambda \tag{16}$$

ここで，

$$\lambda=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\theta}{\sigma^2}}>0 \tag{17}$$

ただし，$\theta > 0$ とする。

【証明】 確率過程 G_t が次の幾何ブラウン運動を(15)に従うものとする。いま，$H(G_t, t) = \log G_t$ として，時点 0 から時点 t までを想定すると，(18)となる。

$$\lambda dH = \lambda\left(\log G_t - \log g\right) = \lambda \log\left(G_t/g\right) = \log\left(G_t/g\right)^{\lambda} \tag{18}$$

また，伊藤の公式より $dH = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dz_t$ となり，時点 0 から時点 t までを想定して，両辺に λ を掛けると(19)となる。

$$\lambda dH = \lambda\left\{\left(\mu - \sigma^2/2\right)t + \sigma z_t\right\} = \lambda\left(\mu - \sigma^2/2\right)t + \lambda\sigma z_t \tag{19}$$

ただし，$(z_t - z_0)$ は正規分布 $N(0, t)$ に従い時刻 n までの履歴 $\mathcal{F}_t$ と独立なので，$(z_t - z_0)$ を改めて Z_t と書いた。(18)と(19)から(20)となる。

$$\log\left(G_t/g\right)^{\lambda} = \lambda\left(\mu - \sigma^2/2\right)t + \lambda\sigma z_t \tag{20}$$

(20)より(21)となる。

$$G_t^{\lambda} = g^{\lambda}\exp\left\{\lambda\left(\mu - \sigma^2/2\right)t + \lambda\sigma z_t\right\} \tag{21}$$

ここで，(19)の両辺の $G_0 = g$ を条件とした期待値 $E^g[\ ]$ をとると(22)となる。

$$E^g\left[G_t^{\lambda}\right] = g^{\lambda}\exp\left\{\left(\lambda\left(\mu - \sigma^2/2\right) + \lambda^2\sigma^2/2\right)t\right\} \tag{22}$$

(22)の両辺を(22)の右辺で割ると(23)となる。

$$\begin{aligned}\frac{E^g\left[G_t^{\lambda}\right]}{g^{\lambda}\exp\left\{\left(\lambda\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)t\right\}} &= E^g\left[\left(\frac{G_t}{g}\right)^{\lambda}\right]\exp\left\{-\left(\lambda\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)t\right\} \\ &= E^g\left[\left(G_t/g\right)^{\lambda}\right]\exp\left(-\theta t\right) = E^g\left[V_t\right] = 1\end{aligned} \tag{23}$$

ここで，(24)と(25)を定義する。

$$\theta \equiv \lambda\left(\mu - \sigma^2/2\right) + \lambda^2\sigma^2/2, \qquad \lambda > 1 \tag{24}$$

$$V_t \equiv \left(G_t/g\right)^{\lambda}\exp\left(-\theta t\right), \qquad t \geq 0 \tag{25}$$

$\lambda > 1$ より $\theta > 0$ となる。また，$\tau(g)$ を $G_{\tau(g)} = g_\tau > 0$ への初到達時刻とする場合，(26)となる。

$$\tau\left(g\right) = \inf\left\{t \geq 0 : G_t = -\infty \quad \text{または} \quad G_t = g_\tau > 0 \mid G_0 = g\right\} \tag{26}$$

$\mu > 0$ のときは，$\Pr\{\tau(g) < \infty | G_0 = g\} = 1$ となることを既知とすることによって，(26)の $\tau(g)$

より(27)となる。

$$0 \leq V_{\min\left\{\tau(g),t\right\}} = \left(\frac{G_{\min\left\{\tau(g),t\right\}}}{g}\right)^{\lambda} \exp\left\{-\theta \min\left\{\tau\left(g\right),t\right\}\right\} \leq \left(\frac{G_{\tau(g)}}{g}\right)^{\lambda} e^{-\theta\tau(g)} \leq \left(\frac{g_{\tau}}{g}\right)^{\lambda} e^{-\theta\tau(g)} \quad (27)$$

(25)から $V_0 = 1$ と V_t の定義より，$G_0 = g$ を条件とした期待値は(28)となる。

$$E^g\left[V_{\tau(g)}\right] = E^g\left[\left(\frac{G_{\tau(g)}}{g}\right)^{\lambda} e^{-\theta\tau(g)}\right] = \left(\frac{g_{\tau}}{g}\right)^{\lambda} E^g\left[e^{-\theta\tau(g)}\right] \quad (28)$$

$V_0 = 1$ と(28)の関係より任意抽出定理[6]が使えて，(29)となる。

$$V_0 = 1 = E^g\left[V_{\tau(g)}\right] \quad (29)$$

(28)と(29)より，(30)となる。

$$1 = \left(g_{\tau}/g\right)^{\lambda} E^g\left[e^{-\theta\tau(g)}\right] \quad (30)$$

(30)から(31)を得ることができ，(16)となる。

$$E^g\left[e^{-\theta\tau(g)}\right] = \left(g/g_{\tau}\right)^{\lambda} \quad (31)$$

ここで，(24)から λ を解くと(32)となる。

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\theta}{\sigma^2}} \quad (32)$$

ただし，$\lambda > 1$ であるので，結局(33)で与えられ，(17)となる。

$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\theta}{\sigma^2}} > 1 \quad (33)$$

Q.E.D.

さて，(5)と(17)より，$G = W$，$g = w$，$g_{\tau} = w_{\tau}$，$\mu = \mu_w$，$\sigma = \sigma_w$ とすると，(10)と(16)から(34)となる。

$$f\left(w\right) = \max_{w_{\tau} \geq 0}\left(\frac{w}{w_{\tau}}\right)^{\beta}\left\{\frac{w_{\tau}}{r - \mu_v} - \left(a + \frac{1}{r - \mu_u}\right)\right\} \quad (34)$$

【命題 3】 確率微分方程式による解法では初期条件とバリューマッチング条件とスムースペイ

スティング条件が境界条件であるのに対し，ドリフト付き幾何ブラウン運動の初到達時刻にラプラス変換を使って，最適停止時刻問題から最適指値問題への変換を行う解法では初期条件とバリューマッチング条件とスムースペイスティング条件は解析的性質として得られる。さらに，投資実行の臨界値（閾値）w^* はプロジェクト価値の最大値として得られる。

【証明】（34）より，$w=0$ のとき（10a）の初期条件となる。次に，（34）より，$w_\tau = w^*$ のとき（10b）のバリューマッチング条件を得る。最後に，（34）より，$w_\tau = w = w^*$ のときで微分すると（10c）のスムースペイスティング条件を得る。

さらに，（34）を w_τ で微分してゼロとおくと，（35）となる。

$$\frac{df\left(w\right)}{dw_\tau} = \left(\frac{w}{w_\tau}\right)^\beta \left[\frac{1}{r-\mu_v} - \beta\left\{\frac{1}{r-\mu_v} - \frac{1}{w_\tau}\left(a+\frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right] = 0 \tag{35}$$

（35）より，w_τ の最適値を w^* として，w^* を求めると（12）となる。

（34）より2次導関数を求めて，$w_\tau \to \pm\infty$ を求めると，（36）となる。

$$\lim_{w_\tau \to \pm\infty} \frac{d^2uf\left(w\right)}{dw_\tau^2} = \lim_{w_\tau \to \pm\infty}\left\{-u\frac{\beta}{w_\tau}\left(\frac{w}{w_\tau}\right)^\beta \left[\frac{1}{r-\mu_v} - \frac{\beta-1}{w_\tau}\left\{\frac{w}{r-\mu_v} - \left(a+\frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right]\right\} = 0 \tag{36}$$

（36）より，（34）は上に凸の単峰型となり，w^* はプロジェクト価値を最大にする投資の臨界値となる。

4. 比 較 静 学

まず，投資実行時の不確実性の効果を検証するために，ボラティリティに関する比較静学を考える。（14）の条件のとき，（12）と（13）から（37）となる。

$$\frac{dw^*}{d\sigma_w^2} = \frac{\partial w^*}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_w^2} > 0 \tag{37}$$

ただし，（12）と（13）から（38）と（39）となる。

$$\frac{\partial w^*}{\partial\beta} = -\frac{r-\mu_v}{\left(\beta-1\right)^2}\left(a+\frac{1}{r-\mu_u}\right) < 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_w^2} = -\frac{1}{\sigma_w^4}\left\{\left(\frac{\mu_w}{\sigma_w^2}+\frac{1}{2}\right)\mu_w + r - \mu_u\right\}\left\{\left(\frac{\mu_w}{\sigma_w^2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\left(r-\mu_u\right)}{\sigma_w^2}\right\}^{-1/2} < 0 \tag{39}$$

次に，プロジェクト価値の不確実性の効果を検証するために，ボラティリティに関する比較静学を考える。このために，（8）と（11）から（40）となる。

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_w^2}=\left(\frac{\partial C}{\partial \beta}+\frac{\partial C}{\partial w^*}\frac{\partial w^*}{\partial \beta}\right)\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_w^2}=\frac{uw^*f\left(w\right)}{\sigma_w^4\beta\left(\beta-1\right)\left(\beta-1/2+\mu_w/\sigma_w^2\right)}$$
$$\times\left\{\frac{\beta\left(r-\mu_v\right)}{\left(\beta-1\right)^2 w}\left(a+\frac{1}{r-\mu_u}\right)-\log\left(\frac{w}{w^*}\right)\right\}\left\{\left(\frac{\mu_w}{\sigma_w^2}+\frac{1}{2}\right)\mu_w+r-\mu_u\right\} \tag{40}$$

5. 数 値 例

表 1 は数値例を表したものであり，コブダグラス型売上関数(3)の係数 k を 1 あるいは 1.1，時点 0 の可変費用 $I_0=i$ を 2，時点 0 の日本円/販売国為替レート $Y_0=y$ を 1，日本円/生産国為替レート $S_0=s$ を 1，(7)の資本規模係数 a を 5 あるいは 15，リスク調整済み割引率 r を 5% とするときの例である。ただし，これらの数値例より，(14)の条件は満たされた。表 1 の下段は上段の数値例から(6)の瞬間的期待収益率と瞬間的ボラティリティを計算している。最下段に，(13)の β と(12)の投資の臨界値 w^* を示した。

また，図 1 の横軸は売上額/可変費用 w，縦軸はプロジェクト価値 $C(x,y,i,s,b)=uf(w)$ で

表 1. 数 値 例

変 数	①	②	③	④	⑤
k	1	1.1	1	1	1
i	2	2	2	2	2
$y=s$	1	1	1	1	1
a	5	5	15	5	5
r	6%	6%	6%	6%	6%
μ_x	3%	3%	3%	3%	3%
μ_i	2%	2%	2%	2%	2%
$\mu_y=\mu_s$	0%	0%	0%	0%	0%
σ_x	15%	15%	15%	30%	15%
σ_i	10%	10%	10%	10%	10%
$\sigma_y=\sigma_s$	5%	5%	5%	5%	5%
ρ_{xi}	0.5	0.5	0.5	0.5	0.99
ρ_{ys}	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
μ_v	3%	3.4238%	3%	3%	3%
μ_u	2%	2%	2%	2%	2%
μ_w	0.0025%	0.3513%	0.0025%	−0.7475%	-0.7325%
σ_w	15.8272%	17.0367%	15.8272%	29.1633%	13.3041%
β	2.12510549	1.865863609	2.12510549	1.613112091	2.969307049
w^*	1.56448581	1.48725312	2.08598108	2.14651417	1.30396725

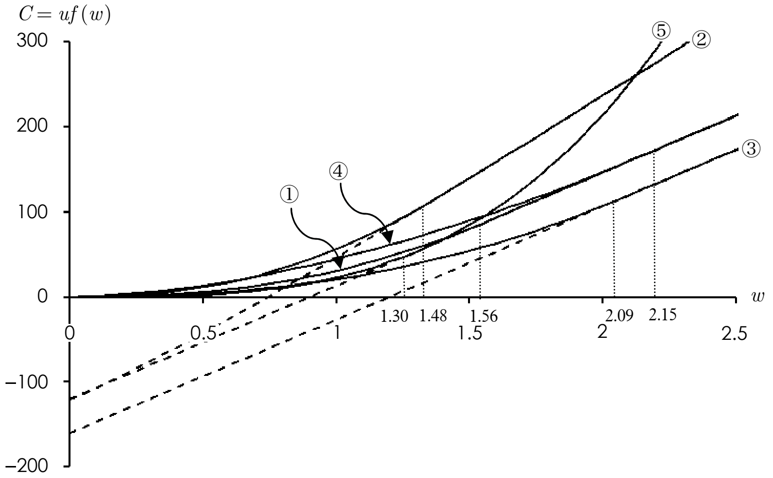

図 1. 売上額 / 可変費用とプロジェクト価値

表し，5 つのケースのプロジェクト価値と投資の臨界値 w^* を図で示した。

6. おわりに

本稿では，ある企業が独占市場において，国外で現地通貨を使って投資と生産を行い，その国以外の第三国に輸出して販売する参入オプション問題を想定し，リアルオプション価値の解法の主流である確率微分方程式を使った解法以外のより簡便なラプラス変換を使った最適停止時刻問題から最適指値問題への解法を紹介した。その際，このラプラス変換を使った解法によって，微分方程式を使った多くのリアルオプションモデルの解法よりも簡便であるという特徴を有していると同時に，微分方程式による解法の際に必要な境界条件は，このラプラス変換による解法の場合には最適化問題の 1 階条件として得られることを示した。

リアルオプションモデルとして，投資，生産，販売と対外国通貨為替レートがそれぞれ幾何ブラウン運動に従うと仮定し，この企業の事業のプロジェクトライフは無限であると考え，一旦参入すると，それ以降，常に販売額と生産のための費用リスクに直面して連続的にキャッシュフローが得られるものと想定した。

補論 A　微分方程式の導出

(5) より (a1) となる。

$$W_{t+n} = W_n e^{\left(\mu_w - \sigma_w^2/2\right)n + \sigma_w z_n^w} \tag{a1}$$

ただし，$(z^w_{t+n} - z^w_n)$ は正規分布 $N(0,t)$ に従い，時刻 n までの履歴 $\mathcal{F}_n$ と独立なので，$(z^w_{t+n} - z^w_n)$ を改めて z^w_n と書いた。ここで，幾何ブラウン運動の強マルコフ性から，任意の停止時刻 τ にたいして，(1) と (8) より (a2) となる。

$$
\begin{aligned}
C\left(x,y,i,s,b\right) = uf\left(w\right) &= \sup_{\tau\ge 0} E^x\left[\int_\tau^\infty e^{-r\tau}\left(\pi\left(X_t\right)Y_t - I_tS_t\right)dt - e^{-r\tau}B_\tau S_\tau\right] \\
&= \sup_{\tau\ge 0} E^v\left[e^{-r\tau}\left\{\int_0^\infty e^{-rt}E\left[V_{\tau+t} \mid F_\tau\right]dt - \int_0^\infty e^{-rt}E\left[U_{\tau+t} \mid F_\tau\right]dt - ae^{-r\tau}U_\tau\right\}\right] \\
&= \sup_{\tau\ge 0} E^v\left[e^{-r\tau}\left\{\frac{V_\tau}{r-\mu_v} - U_\tau\left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right] \\
&= u\sup_{\tau\ge 0} E^w\left[e^{-\left(r-\mu_u\right)\tau}\left\{\frac{W_\tau}{r-\mu_v} - \left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{a2}
$$

時刻 t におけるプロジェクト価値 $f(w)$ はベルマン方程式を用いて，(a3) と表すことができる。

$$
f\left(w\right) = \max\left\{E^w_t\left[e^{-\left(r-\mu_u\right)dt}f\left(W_{t+dt}\right)\right],\ \frac{w}{r-\mu_v} - \left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\} \tag{a3}
$$

(a3) は変分不等式として，(a4) と書き換えることができる。

$$
f\left(w\right) \ge E^w_t\left[e^{-\left(r-\mu_u\right)dt}f\left(W_{t+dt}\right)\right],\ f\left(w\right) \ge \frac{w}{r-\mu_v} - \left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right) \tag{a4}
$$

ただし，(a4) のどちらか一方の不等号は等号で成立しなければならない。

まず，企業が投資を遅延するときのプロジェクト価値 $f(w_t)$ が満たさなければならない微分方程式を導出する。すなわち，(a3) の第 1 式か等号となり，(a5) を考える。

$$
f\left(w\right) = e^{-\left(r-\mu\right)t}E^w_t\left[f\left(w + dW_t\right)\right] = \left(1 - \left(r-\mu_u\right)dt\right)E^w_t\left[f\left(w\right) + df\left(W_t\right)\right] \tag{a5}
$$

ただし，$dW_t = W_{t+dt} - W_t = W_{t+dt} - w,\ (dt)^2 = 0$ と置いた。伊藤の公式から，$f(w)$ の過程は (a6) である。

$$
df\left(w\right) = \left(\mu_w w f_w\left(w\right) + \frac{1}{2}f_{ww}\left(w\right)\sigma_w^2 w^2\right)dt + f_w\left(w\right)\sigma_w w dz^w_t \tag{a6}
$$

補論 B　測度変換による解法

次に，プロジェクト価値が (1) のように与えられている場合には，測度変換を利用することで

1変数の問題に帰着できる。すなわち，指数マルチンゲール(b1)を考える。

$$Z_t = \exp\left(\sigma_u z_t^u - \sigma_u^2 t/2\right), \qquad t \geq 0 \tag{b1}$$

ただし，$\sigma_u z_t^u \equiv \sigma_i dz_t^i + \sigma_s dz_t^s$ とする。次に，Z_τ による測度変換(b2)を想定する。

$$\widetilde{\mathrm{P}}\left(A\right) = E\left[1_A Z_\tau\right], \qquad A \in F_\tau \tag{b2}$$

(b2)より(b3)となる。

$$E^w\left[e^{-\left(r-\mu_u\right)\tau}\left\{\frac{W_\tau}{r-\mu_v} - \left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right] = \widetilde{E}^w\left[e^{-\left(r-\mu_u\right)\tau}\left\{\frac{W_\tau}{r-\mu_v} - \left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right] \tag{b3}$$

ただし，$\widetilde{E}$ は確率測度 $\widetilde{\mathrm{P}}$ に関する期待値を表す。

ここで，ギルサノフ（Girsanov）の定理から，変換後の確率測度 $\widetilde{\mathrm{P}}$ の下で，(b4)の左辺は標準ブラウン運動である。

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t^x &= z_t^x + \left\{\left(k-1\right)\sigma_x/2 + \rho_{xy}\sigma_y - \rho_{xi}\sigma_i - \rho_{xs}\sigma_s\right\}t, \\ \tilde{z}_t^y &= z_t^y - \left(\rho_{yi}\sigma_i + \rho_{ys}\sigma_s\right)t, \qquad \tilde{z}_t^i = z_t^i + \rho_{is}\sigma_s t \end{aligned} \tag{b4}$$

一方，伊藤の商公式から，(5)が得られる。確率測度の $\widetilde{\mathrm{P}}$ の下では，(b5)が成立する。

$$dW_t/W_t = \left(k\mu_x + \mu_y - \mu_i - \mu_s\right)dt + \tilde{\sigma}_w d\tilde{z}_t^w \tag{b5}$$

ただし，(b6)と置く。

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_w^2 &= k^2\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_i^2 + \sigma_s^2 \\ &\quad + 2\left(k\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y - k\rho_{xi}\sigma_x\sigma_i - k\rho_{xs}\sigma_x\sigma_s - \rho_{yi}\sigma_y\sigma_i - \rho_{ys}\sigma_y\sigma_s + \rho_{is}\sigma_i\sigma_s\right) \end{aligned} \tag{b6}$$

標準ブラウン運動 $\tilde{z}_t^w$ を(b7)で定義した。

$$\tilde{\sigma}_w d\tilde{z}_t^w \equiv k\sigma_x d\tilde{z}_t^x + \sigma_y d\tilde{z}_t^y - \sigma_i d\tilde{z}_t^i - \sigma_s dz_t^s \tag{b7}$$

以上から，プロジェクト価値が(8)のように与えられている場合には，価値関数は(b3)と(8)より(b8)となる。

$$C\left(x, y, i, s, b\right) = uf\left(w\right) = u\sup_{\tau\geq 0}\widetilde{E}^w\left[e^{-\left(r-\mu_u\right)\tau}\left\{\frac{W_\tau}{r-\mu_v} - \left(a + \frac{1}{r-\mu_u}\right)\right\}\right] \tag{b8}$$

(b8)は状態変数 W_t が幾何ブラウン運動(2)に従うとし，1変数問題として扱えて，結局【命題1】が成立する。

〔注〕

1） 状態変数が2種類存在するリアルオプションの論文として，McDonald and Siegel〔3〕があるが，彼らの証明の不十分さのために，Olsen and Stensland〔6〕は新しい証明を与えている。

2） 価値関数が日本円表示の売上額 V_t と日本円表示の生産額（可変費用）U_t に関して1次同次であることが利用できる。

3） 微分方程式の書籍として，Øksebdal〔5〕を示しておく。

4） $w^* > 0$ あるいは $x^* > 0$ となる必要条件は(12)から下式となる。

$$\frac{r-\mu_v}{\beta-1}\left(a+\frac{1}{r-\mu_u}\right) > 0$$

5） 木島，中岡，柴田〔1〕の pp. 35–36，木島〔2〕の pp. 167–168，森村，木島〔4〕の pp. 106–107 を参照されたい。

6） 木島〔2〕の p. 75 より【任意抽出定理】$\{Y_n, n=0,1,\cdots\}$ は $\{Z_n, n=0,1,\cdots\}$ に関してマルチンゲールとし，T を確率1で有限な停止時刻とする。このとき，ある $K>0$ が存在して，$n \le T$ であるすべての n に対して $E\left[Y_n^2\right] \le K$ が成り立つならば，$E\left[Y_T\right] = E\left[Y_0\right]$ が成立する。

〔参考文献〕

〔1〕 木島正明，中岡英隆，柴田隆志著：リアル・オプションと投資戦略，朝倉書店，(2008).

〔2〕 木島正明：ファイナンス工学入門――第I部　ランダムウォークとブラウン運動――，日科技連出版社，(1994).

〔3〕 McDonald, R. and D. Siegel: The Value of Waiting to Invest, *Journal of Economics,* 101, pp. 707–727, (1986).

〔4〕 森村英典，木島正明著：ファイナンスのための確率過程，日科技連，(1991).

〔5〕 Øksebdal, B. (1998), *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application 5th editon,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.（ベァーント・エクセンダール著，谷口説男訳，(1999)「確率微分方程式：入門から応用まで」，シュプリンガー・フェアラーク東京）

〔6〕 Olsen, T. E. and G. Stensland, "On Optimal Timing of Investment When Cost Components are Additive and Follow Geometric Diffusions," *Journal of Economic Dynamics Control,* 16, pp. 39–51 (1992).