VARMA-GARCH モデルの最尤推定法*

―解　析　編―

中川裕司・中山章宏・岡山将也**

[1]　はじめに

標準線形回帰モデルでは，誤差項には系列相関がなく，誤差項の分散が一定であると仮定されている。しかし実証分析では，しばしばこれらの仮定が満たされないことがある。そのとき誤差項は不均一分散(heteroscedasticity)とよばれる。こうした状況に直面したときに，変数の階差をとるか，ある条件下では荷重最小二乗法を用いるか，あるいは誤差項に 1 次の系列相関が存在するモデルで推定するか，などが考えられている。しかし本稿では，誤差項に系列相関が存在し，かつ誤差項の分散共分散に相関が存在する場合の回帰モデルを多変量 VARMA-GARCH モデル[1]を用いた最尤推定値の解析とアルゴリズムを考える。またこれまでの分析あるいは教科書的なテキスト(さらには論文)では，モデルの誤差項が正規分布に従う場合に限って最尤法が論じられてきたが，実際にデータ分析の結果，モデルの誤差項が正規分布に従っていないのではないかという疑問が提出されている。そこで本稿では多変量正規分布とともに，多変量 t 分布に従う場合の最尤推定量とを比較しながら導出することにする。

GARCH モデルは誤差項の 2 次のモーメントを同定するモデルであり，これまでファイナンスの分野のみで多用されてきたモデルであるが，次節以降で理解されるように，最小自乗推定量はむしろ GARCH モデルの特殊なタイプの推定量であることが理解されると考える。その意味で回帰分析を行おうと思うあらゆる分野で利用可能な推定方法である。

[2] 最尤推定法

ここでは，誤差項が多変量正規分布あるいは多変量 t 分布に従う場合の 2 次のモーメントのモデル，すなわち多変量 GARCH(1,1)モデルの対数尤度関数を明らかにする。まず，n 種類のデータの観測値 $\mathbf{y}=\{\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_T\}$ が異時点間，すなわち，$'\mathbf{y}_t=[y_{1t},\cdots,y_{nt}]$ と $'\mathbf{y}_s (t<s\leq T)$ が独立でない場合，T 個の観測値の尤度関数は(1)式の結合密度関数で表される。

$$L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})=\prod_{t=2}^{T}p(\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1};\boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta})=\prod_{t=1}^{T}p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\theta}) \tag{1}$$

ここで，記号(')は転置行列を表し，$'\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\cdots,\theta_k]$ は次節以降で同定したモデルの中の k 個のパラメータ群(最尤推定値)を表す列ベクトルである。$p(\tilde{\mathbf{y}}_t|\mathbf{Y}_{t-1};\boldsymbol{\theta})$ は $'\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,\cdots,\theta_k]$ を所与とした $'\mathbf{Y}_{t-1}=[\mathbf{y}_{t-1},\cdots,\mathbf{y}_1]$ の観測値を条件とした $\tilde{\mathbf{y}}_t$ の確率密度関数を表す。

$$\underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg}\ \mathit{Max}\ \ L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})\ =\ \underset{\boldsymbol{\theta}}{\arg}\ \mathit{Max}\ \ \log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) \tag{2}$$

であるので，最尤法では(1)式の両辺の対数をとった対数尤度関数を極大化するように最適値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ が決定される。すなわち次式が満たされる。

$$\left.\frac{\partial \log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right|_{\theta_i=\hat{\theta}_i}=0 \qquad i=1,\cdots,k. \tag{3}$$

---

* この論文は岐阜経済大学共同研究助成を受けている。また次号以降で「アルゴリズム編」を掲載する予定である。

** 日立製作所勤務。

[1] VARMA(Vector Autoregressive Moving Average Model)はベクトル自己回帰移動平均型モデルを表す。また，Bollerslev(1986)による GARCH モデル(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model)は Engle(1982)の ARCH モデルを一般化したモデルであり，和合・伴(1988)は Engle による ARCH モデルを「分散不均一性の下での自己回帰モデル」とよぶ。

一般に1次のモーメントのベクトル回帰モデルは(4)式で表される。

$$\mathbf{y}_t = E[\tilde{\mathbf{y}}_t|\mathbf{Y}_{t-1}] + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \tag{4}$$

ここで，$E[\mathbf{y}_t|\mathbf{Y}_{t-1}]$は$\mathbf{Y}_{t-1}$を条件とした$\mathbf{y}_t$の条件付期待値を表し，$'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = [\tilde{\varepsilon}_{1t} \ \cdots \ \tilde{\varepsilon}_{nt}]$であり，誤差項$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$の条件付期待値$E[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t|Y_{t-1}]$はゼロである。(4)式の下で多変量正規分布と多変量t分布のそれぞれの同時密度関数は次のように表される。

まずn変量正規分布の同時密度関数を考える。$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$が$n$変量正規分布に従うと仮定するとき，$n$変量同時確率密度関数$p(\tilde{\mathbf{y}}_t;\boldsymbol{\theta})$は

$$p(\tilde{\mathbf{y}}_t;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{h}_t|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left('\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\mathbf{h}_t^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\right)\right\} \tag{5}$$

である。ここで，$\mathbf{h}_t$は$n \times n$の正定値対称行列の誤差項の条件付分散共分散行列を表し，その要素は$\{h_{ijt}\}_{i,j=1}^{i,j=n}$である。このとき(5)式の対数尤度関数は

$$\log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T}\log p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n(T-1)}{2}(\log 2 + \log\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\left(\log|\mathbf{h}_t| + '\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\mathbf{h}_t^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\right) + \log p(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta}) \tag{6}$$

となる。

次に$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$が自由度$m\ (=T-k)$の$n$変量$t$分布に従うと仮定するときの$n$変量同時確率密度関数$p(\tilde{\mathbf{y}}_t;\boldsymbol{\theta})$は

$$p(\tilde{\mathbf{y}}_t;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\sqrt{(m\pi)^n}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{|\mathbf{h}_t|}}\left(1 + \frac{'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\mathbf{h}_t^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t}{n}\right)^{-\left(\frac{m+n}{2}\right)} \tag{7}$$

で表される。ここで，$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数を表す。このとき対数尤度関数は

$$\begin{aligned}\log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = (T-1)&\left[\log\left\{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\right\} - \log\left\{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right\} + \frac{n}{2}(\log m + \log\pi) + \left(\frac{m+n}{2}\right)\log n\right] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\left\{\log|\mathbf{h}_t| + (m+n)\log\left(n + '\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\mathbf{h}_t^{-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\right)\right\} + \log p(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta})\end{aligned} \tag{8}$$

となる。

次に(4)式の下で，2次のモーメントのモデルを(9)式のようにn変量GARCH(1,1)モデルで同定する[2]。

$$\mathbf{h}_t \equiv E\left['\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t|\mathbf{Y}_{t-1}\right] = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{h}_{t-1} \tag{9}$$

ここで，$h_{ijt} = h_{jit}$であるため，$\mathbf{h}_t$は対称行列で表される条件付分散共分散行列$Cov(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{jt}|Y_{t-1})$である。

$\mathbf{h}_t$は$n(n+1)/2$種類存在するため，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}_0$と$\boldsymbol{\alpha}$と$\boldsymbol{\beta}$の数の合計は$n(n+1)\{n(n+1)+1\}/2$となる。このとき，$n=3$すなわち3変量モデルであるときでさえも，求めるべきパラメータの数は78個と多い。そこで，(10a)式の1変量モデル，(10b)式の2変量モデル，(10c)式の3変量モデルに限定して考えていくことにする。

$$\mathbf{h}_t = h_{1t}, \tag{10a}$$

$$\mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} h_{1t} & \\ h_{12t} & h_{22t} \end{bmatrix}, \tag{10b}$$

$$\mathbf{h}_t = \begin{bmatrix} h_{1t} & & \\ \rho_{12}\sqrt{h_{1t}h_{22t}} & h_{22t} & \\ \rho_{13}\sqrt{h_{1t}h_{33t}} & \rho_{23}\sqrt{h_{22t}h_{33t}} & h_{33t} \end{bmatrix}, \tag{10c}$$

[2] ここで，通常のOLSで誤差項の無相関性の仮定は(9)式の$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = 0$のみで表現されるモデルに一致する。

ここで，(10c)式の ρ_{ij} は第 i 種類のデータと第 j 種類のデータの時点に依存しない相関係数を表す。以下では，特に断らない限り，(10b)式の h_{12t} と h_{22t} をゼロ，あるいは(10c)式の h_{22t} と h_{33t} をゼロ，かつ $\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=0$ とすることによって，(10a)式と整合する。(10)式の下で，(6)式と(8)式の対数尤度関数をパラメータの関数毎に(11)式で表すことにする。

$$\log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}) = const. - \frac{1}{2}\sum_{t=2}^{T}\{l_1(\boldsymbol{\rho},\mathbf{h}_t)+l_2(\boldsymbol{\rho},\mathbf{h}_t,\boldsymbol{\varepsilon}_t)\}+\log p(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta}) \tag{11}$$

ここで，$l_i(\cdot)\ (i=1,2)$ は関数を表し，さらに $\boldsymbol{\rho}$ は ρ_{12} と ρ_{13} と ρ_{23} の関数，$\mathbf{h}_t$ は 2 次のモーメントの回帰モデルのパラメータである $\boldsymbol{\alpha}_0$ と $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の関数であり，$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ は次節で同定する 1 次のモーメントの回帰モデルのパラメータある。(11)式で同定すると，(6)式または(8)式と(10)式と(11)式より，

$$const. = \begin{cases} -\dfrac{n(T-1)}{2}(\log 2+\log \pi), & if \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \overset{p.d.}{\sim} n\text{変量正規分布.} \\ (T-1)\left[\log\left\{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)\right\}-\log\left\{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\right\}+\dfrac{n}{2}(\log m+\log \pi)+\left(\dfrac{m+n}{2}\right)\log n\right], & if \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \overset{p.d.}{\sim} n\text{変量}t\text{分布.} \end{cases} \tag{12a}$$

$$l_1(\boldsymbol{\rho},\mathbf{h}_t) = \log\Theta_t + \log h_{1t} + \log h_{22t} + \log h_{33t} \tag{12b}$$

$$l_2(\boldsymbol{\rho},\mathbf{h}_t,\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \begin{cases} \dfrac{\Omega_t}{\Theta_t}, & if \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \overset{p.d.}{\sim} n\text{変量正規分布,} \\ (m+n)\log(n\Theta_t+\Omega_t), & if \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \overset{p.d.}{\sim} n\text{変量}t\text{分布.} \end{cases} \tag{12c}$$

である。ここで，

$$\Theta_t = \begin{cases} 1, & if \quad 1\text{変量モデル} \\ h_{11t}h_{22t}-h_{12t}^2, & if \quad 2\text{変量モデル} \\ 1+2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}-\rho_{12}^2-\rho_{13}^2-\rho_{23}^2, & if \quad 3\text{変量モデル} \end{cases} \tag{13a}$$

$$\Omega_t = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_{1t}^2}{h_{11t}} & if \quad 1\text{変量モデル} \\ \varepsilon_{1t}^2 h_{22t} - 2\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}h_{12t} + \varepsilon_{2t}^2 h_{11t} & if \quad 2\text{変量モデル} \\ \dfrac{(1-\rho_{23}^2)\varepsilon_{1t}^2}{h_{11t}}+\dfrac{(1-\rho_{13}^2)\varepsilon_{2t}^2}{h_{22t}}+\dfrac{(1-\rho_{12}^2)\varepsilon_{3t}^2}{h_{33t}}+2\left\{\dfrac{(\rho_{13}\rho_{23}-\rho_{12})\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}}{\sqrt{h_{11t}h_{22t}}}+\dfrac{(\rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13})\varepsilon_{1t}\varepsilon_{3t}}{\sqrt{h_{11t}h_{33t}}}+\dfrac{(\rho_{12}\rho_{13}-\rho_{23})\varepsilon_{2t}\varepsilon_{3t}}{\sqrt{h_{22t}h_{33t}}}\right\} & if \quad 3\text{変量モデル} \end{cases} \tag{13b}$$

であり，$t \geq 2$ とする。(11)式の右辺の $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ と $\log p(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta})$ はモデルを同定する次節で確定する。

[3] 多変量 VARMA(1,1)-GARCH(1,1)モデル

つぎに誤差項が多変量正規分布あるいは多変量 t 分布に従う場合の 1 次のモーメントのモデル，すなわち n 変量 VARMA(1,1)モデルを同定することによって，(11)式から(13)式の対数尤度関数を明らかにするために，(4)式のベクトル回帰モデルを次の(14)式の n 変量 VARMA(1,1)モデルで同定する[3]。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \tag{14}$$

ここで，$\mathbf{b}_0$ は $n\times 1$ 行列であり，その要素は $\{b_{i0}\}_{i=1}^{i=n}$，$\mathbf{b}$ は $n\times n$ 行列であり，その要素は $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{i,j=n}$，$\mathbf{c}$ は $n\times n$ ベクトルであり，その要素は $\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{i,j=n}$ であり、このときパラメータの数は $2n^2$ 個である。よって，n 変量 VARMA(1,1)-GARCH(1,1)モ

[3] 1 次のベクトル自己回帰(VAR(1))モデルの場合は $\mathbf{c}=\mathbf{0}$，1 次のベクトル移動平均(VMA(1))モデルの場合は $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ と考えることができる。定常性条件を満たしていれば，AR モデルと ARMA モデルは MA(∞)モデルとして表現でき，MA モデルと ARMA モデルもある条件下では AR(∞)モデルとして表現できる。詳細は山本(1988 第 3 章)。

デルのパラメータの数は合計で$n\{n(n+1)^2+5n+1\}/2$個となる[4]。ここで，$n=3$であるときでさえも，求めるべきパラメータの数は96個と多い。そこで，推定すべきパラメータ数を考慮して，次の1変量VARMA(1,1)-GARCH(1,1)モデルと2変量VARMA(1,1)-GARCH(1,1)モデルと3変量VARMA(1,1)-GARCH(1,1)モデルに特定化して，以下言及していく。

まずn変量VARMA(1,1)モデルを(15)式で同定する[5]。

$$y_{it}=b_{i0}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_{jt-1}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\varepsilon_{jt-1}+\tilde{\varepsilon}_{it},\qquad i\le n=1,2,3. \tag{15}$$

次にn変量GARCH(1,1)モデルを(16)式で同定する[6]。

$$h_{ijt}=\alpha_{ij0}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l\ge k}^{n}\alpha_{ijkl}\varepsilon_{kt-1}\varepsilon_{lt-1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l\ge k}^{n}\beta_{ijkl}h_{klt-1},\qquad i\le j\le n=1,2,3. \tag{16}$$

このとき，(11)式の$\log p(\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta})$の項は$n$変量VARMA(1,1)-GARCH(1,1)モデルを想定するとき，次のように確定する。

$$\varepsilon_{i1}=y_{i1}-b_{i0},\qquad h_{ii1}=\alpha_{ii0},\qquad i\le n=1,2,3. \tag{17}$$

[4] 最適値

n変量モデルで誤差項が多変量正規分布または多変量t分布に従うと仮定した場合の対数尤度関数(11)式を極大化するため，(11)式をそれぞれ$\boldsymbol{\theta}=(\mathbf{b}_0,\mathbf{b},\mathbf{c},\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\rho})$の変数で偏微分してゼロとおいて1階条件を求め，最適値を

$\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\mathbf{b}}_0,\hat{\mathbf{b}},\hat{\mathbf{c}},\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0,\hat{\boldsymbol{\alpha}},\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{\rho}})$とする[7]。

$$\left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial b_{i0}}\right|_{b_{i0}=\hat{b}_{i0}}=\sum_{t=1}^{T}\hat{F}_{it}=0,\qquad \left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial b_{ij}}\right|_{b_{ij}=\hat{b}_{ij}}=\sum_{t=2}^{T}\hat{F}_{it}y_{jt-1}=0,\qquad \left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial c_{ij}}\right|_{c_{ij}=\hat{c}_{ij}}=\sum_{t=1}^{T}\hat{F}_{it}\hat{\varepsilon}_{jt-1}=0, \tag{18a}$$

$$\left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \alpha_{ij0}}\right|_{\alpha_{ij0}=\hat{\alpha}_{ij0}}=\sum_{t=1}^{T}\hat{\Phi}_{ijt}=0,\qquad \left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \alpha_{ijkl}}\right|_{\alpha_{ijkl}=\hat{\alpha}_{ijkl}}=\sum_{t=2}^{T}\hat{\Phi}_{ijt}\varepsilon_{kt-1}\varepsilon_{lt-1}=0,\qquad \left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \beta_{ijkl}}\right|_{\beta_{ijkl}=\hat{\beta}_{ijkl}}=\sum_{t=2}^{T}\hat{\Phi}_{ijt}h_{klt-1}=0, \tag{18b}$$

$$\left.\frac{\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \rho_{ij}}\right|_{\rho_{ij}=\hat{\rho}_{ij}}=\sum_{t=1}^{T}\hat{G}_{ijt}=0 \tag{18c}$$ [8]

ここで，

$$\hat{\varepsilon}_{it}\equiv y_{it}-\hat{b}_{i0}-\sum_{j=1}^{n}\hat{b}_{ij}y_{jt-1}-\sum_{j=1}^{n}\hat{c}_{ij}\varepsilon_{jt-1},\quad \hat{\varepsilon}_{i1}\equiv y_{i1}-\hat{b}_{i0},\quad \hat{h}_{ii1}\equiv\hat{\alpha}_{ii0},\quad \hat{h}_{iit}\equiv\hat{\alpha}_{ij0}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l\ge k}^{n}\hat{\alpha}_{ijkl}\varepsilon_{kt-1}\varepsilon_{lt-1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l\ge k}^{n}\hat{\beta}_{ijkl}h_{klt-1} \tag{19a}$$ [9]

$$\hat{\Theta}_t=\begin{cases}1 & \text{if 1変量モデル}\\ \hat{h}_{11t}\hat{h}_{22t}-\hat{h}_{12t}^2 & \text{if 2変量モデル}\\ 1+2\hat{\rho}_{12}\hat{\rho}_{13}\hat{\rho}_{23}-\hat{\rho}_{12}^2-\hat{\rho}_{13}^2-\hat{\rho}_{23}^2 & \text{if 3変量モデル}\end{cases} \tag{19b}$$

---

[4] n変量VAR(1)-GARCH(1,1)モデルまたはn変量VMA(1)-GARCH(1,1)モデルの場合，パラメータ数は$n(n+1)\{n(n+1)+3\}/2$である。

[5] VAR(1)モデルを想定するとき$c_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$であり，VMA(1)モデルを想定するとき$b_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$である。

[6] ここで，α_{ii0}以外のパラメータのゼロ仮設検定が棄却できなければ，通常のOLSによる推定値がより賢明な推定法であると考えても差し支えない。

[7] 1次のモーメント式からなるモデルの場合には，最尤推定量は最小自乗推定量に一致する。1変量モデルの場合には$i=j=k=l=1$，2変量モデルの場合には$i,j=1,2$，3変量モデルの場合には$i,j=1,2,3$である。VAR(1)モデルを想定する場合，$\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial c_{ij}$の式は不要である。VMA(1)モデルを想定する場合，$\partial\log L(\mathbf{y};\hat{\boldsymbol{\theta}})/\partial b_{ij}$の式は不要である。

[8] (18c)式は3変量モデルの場合にのみ使用し，$i,j=1,2,3,\quad i<j$である。

[9] ここで，1変量モデルの場合には$n=i=j=1$，2変量モデルの場合には$n=2,i,j=1,2$，3変量モデルの場合には$n=3,i=j=1,2,3$である。VAR(1)モデルを想定するとき$\hat{c}_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$であり，VMA(1)モデルを想定するとき$\hat{b}_{ij}=0,(i,j=1,2,3)$である。

$$\hat{\Omega}_t=\begin{cases}\dfrac{\hat{\varepsilon}_{1t}^2}{\hat{h}_{11t}} & \text{if}\ \ 1\text{変量モデル}\\ \hat{\varepsilon}_{1t}^2\hat{h}_{22t}-2\hat{\varepsilon}_{1t}\hat{\varepsilon}_{2t}\hat{h}_{12t}+\hat{\varepsilon}_{2t}^2\hat{h}_{11t} & \text{if}\ \ 2\text{変量モデル}\\ \dfrac{\left(1-\hat{\rho}_{23}^2\right)\hat{\varepsilon}_{1t}^2}{\hat{h}_{11t}}+\dfrac{\left(1-\hat{\rho}_{13}^2\right)\hat{\varepsilon}_{2t}^2}{\hat{h}_{22t}}+\dfrac{\left(1-\hat{\rho}_{12}^2\right)\hat{\varepsilon}_{3t}^2}{\hat{h}_{33t}}+2\left\{\dfrac{\left(\hat{\rho}_{13}\hat{\rho}_{23}-\hat{\rho}_{12}\right)\hat{\varepsilon}_{1t}\hat{\varepsilon}_{2t}}{\sqrt{\hat{h}_{11t}\hat{h}_{22t}}}+\dfrac{\left(\hat{\rho}_{12}\hat{\rho}_{23}-\hat{\rho}_{13}\right)\hat{\varepsilon}_{1t}\hat{\varepsilon}_{3t}}{\sqrt{\hat{h}_{11t}\hat{h}_{33t}}}+\dfrac{\left(\hat{\rho}_{12}\hat{\rho}_{13}-\hat{\rho}_{23}\right)\hat{\varepsilon}_{2t}\hat{\varepsilon}_{3t}}{\sqrt{\hat{h}_{22t}\hat{h}_{33t}}}\right\} & \text{if}\ \ 3\text{変量モデル}\end{cases}\tag{19c}$$

$$\hat{F}_{it}=\begin{cases}\hat{f}_{it}, & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}n\text{変量正規分布},\\ \dfrac{\hat{f}_{it}}{n\hat{\Theta}_t+\hat{\Omega}_t}, & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}n\text{変量}\,t\,\text{分布}.\end{cases}\tag{19d[10]}$$

$$\hat{\Phi}_{1it}=\begin{cases}\dfrac{1}{\hat{h}_{1it}}\left(\hat{\Omega}_t-1\right), & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}1\text{変量正規分布},\\ \dfrac{1}{\hat{h}_{1it}}\left\{\dfrac{(m+n)\hat{\Omega}_t}{n\hat{\Theta}_t+\hat{\Omega}_t}-1\right\}, & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}1\text{変量}\,t\,\text{分布}.\end{cases}$$

$$\hat{\Phi}_{ijt}=\begin{cases}\dfrac{1}{\hat{\Theta}_t^{i-j+1}}\left\{\left(\dfrac{\hat{\Omega}_t}{\hat{\Theta}_t}-1\right)\hat{h}_{3-j3-it}-\hat{\varepsilon}_{3-jt}\hat{\varepsilon}_{3-it}\right\}, & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}2\text{変量正規分布},\\ \dfrac{(m+n-1)\hat{h}_{3-j3-it}}{\hat{\Theta}_t}-\dfrac{(m+n)\left(n\hat{h}_{3-j3-it}+\hat{\varepsilon}_{3-jt}\hat{\varepsilon}_{3-it}\right)}{n\hat{\Theta}_t+\hat{\Omega}_t}, & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}2\text{変量}\,t\,\text{分布}.\end{cases}\qquad i\le j\tag{19e[11]}$$

$$\hat{\Phi}_{iit}=\begin{cases}\dfrac{1}{\hat{h}_{iit}}\left(\dfrac{\hat{f}_{it}\hat{\varepsilon}_{it}}{\hat{\Theta}_t}-1\right), & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}3\text{変量正規分布},\\ \dfrac{1}{\hat{h}_{iit}}\left\{\dfrac{(m+n)\hat{f}_{it}\hat{\varepsilon}_{it}}{n\hat{\Theta}_t+\hat{\Omega}_t}-1\right\}, & \text{if}\quad \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}3\text{変量}\,t\,\text{分布}.\end{cases}$$

$$\hat{G}_{ijt}=\begin{cases}\left(\hat{\rho}_{ij}-\hat{\rho}_{ik}\hat{\rho}_{jk}\right)\left(1-\dfrac{\hat{\Omega}_t}{\hat{\Theta}_t^2}\right)+\dfrac{1}{\hat{\Theta}}\left(\dfrac{\hat{\rho}_{ij}\hat{\varepsilon}_{kt}^2}{\hat{h}_{kkt}}+\dfrac{\hat{\varepsilon}_{it}\hat{\varepsilon}_{jt}}{\sqrt{\hat{h}_{iit}\hat{h}_{jjt}}}-\dfrac{\hat{\rho}_{jk}\hat{\varepsilon}_{it}\hat{\varepsilon}_{kt}}{\sqrt{\hat{h}_{iit}\hat{h}_{kkt}}}-\dfrac{\hat{\rho}_{ik}\hat{\varepsilon}_{jt}\hat{\varepsilon}_{kt}}{\sqrt{\hat{h}_{jjt}\hat{h}_{kkt}}}\right), & \text{if}\ \ \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}3\text{変量正規分布},\\ \left(\hat{\rho}_{ij}-\hat{\rho}_{ik}\hat{\rho}_{jk}\right)\left\{\dfrac{1}{\hat{\Theta}_t}-\dfrac{n(m+n)}{n\hat{\Theta}_t+\hat{\Omega}_t}\right\}+\dfrac{m+n}{n\hat{\Theta}_t+\hat{\Omega}_t}\left(\dfrac{\hat{\rho}_{ij}\hat{\varepsilon}_{kt}^2}{\hat{h}_{kkt}}+\dfrac{\hat{\varepsilon}_{it}\hat{\varepsilon}_{jt}}{\sqrt{\hat{h}_{iit}\hat{h}_{jjt}}}-\dfrac{\hat{\rho}_{jk}\hat{\varepsilon}_{it}\hat{\varepsilon}_{kt}}{\sqrt{\hat{h}_{iit}\hat{h}_{kkt}}}-\dfrac{\hat{\rho}_{ik}\hat{\varepsilon}_{jt}\hat{\varepsilon}_{kt}}{\sqrt{\hat{h}_{jjt}\hat{h}_{kkt}}}\right), & \text{if}\ \ \tilde{\varepsilon}_t\overset{p.d.}{\sim}3\text{変量}\,t\,\text{分布}.\end{cases}\tag{19f[12]}$$

$$\hat{f}_{it}\equiv\begin{cases}\dfrac{\hat{\varepsilon}_{1t}}{\hat{h}_{11t}} & \text{if}\ \ 1\text{変量モデル}\\ \hat{h}_{12t}\hat{\varepsilon}_{3-it}-\hat{h}_{3-i3-it}\hat{\varepsilon}_{it} & \text{if}\ \ 2\text{変量モデル}\\ \dfrac{1}{\sqrt{h_{iit}}}\left\{(-1)^{j-1}\dfrac{\left(\hat{\rho}_{jk}\hat{\rho}_{23}-\hat{\rho}_{1i}\right)\hat{\varepsilon}_{1t}}{\hat{h}_{1t}}+(-1)^{i-1}\dfrac{\left(\hat{\rho}_{jk}\hat{\rho}_{13}-\hat{\rho}_{2i}\right)\hat{\varepsilon}_{2t}}{\sqrt{\hat{h}_{22t}}}+(-1)^{k-1}\dfrac{\left(\hat{\rho}_{jk}\hat{\rho}_{12}-\hat{\rho}_{3i}\right)\hat{\varepsilon}_{3t}}{\sqrt{\hat{h}_{33t}}}\right\} & \text{if}\ \ 3\text{変量モデル}\end{cases}\tag{19g[13]}$$

である。

[5] BHHH 法

最尤法では対数尤度関数を極大化するように最適値 $\hat{\theta}$ が決定されるが，(18)式と(19)式を求める最適値の方程式群は非線形式であるため，解法が難しい。しかし大標本で固定された $\mathbf{y}$ の下では，(17)式を無視しても，最尤推定値は影響を受け

10 ここで，$i=1,\cdots,n$ である。

11 ここで，$i,j=1,\cdots,n$ である。

12 ここで，$i,j,k=1,2,3\,(i\neq j\neq k)$ である。

13 ここで，2 変量モデルの場合は $i=1,2$，3 変量モデルの場合は $i,j,k=1,2,3$, $i\neq j<k$ である。また $\rho_{ii}=1\,(i=1,2,3)$ とする。

ないことが知られている。そこで，BHHH(Berndt-Hall-Hall-Hausman)法[14]を使ったパラメータの推定を考える。BHHH法とは対数尤度関数の一階導関数の分散共分散行列を利用する方法である。すなわち，k個のパラメータを持つモデルのステップ$\tau+1$は次式のように表される。

$$\boldsymbol{\theta}^{\tau+1}=\boldsymbol{\theta}^{\tau}+\lambda^{\tau}\left[\sum_{t=2}^{T}\boldsymbol{\Psi}_t^{\tau}\left({}^{t}\boldsymbol{\Psi}_t^{\tau}\right)\right]^{-1}\left(\sum_{t=2}^{T}\boldsymbol{\Psi}_t^{\tau}\right) \tag{20a}$$

ここで，$\boldsymbol{\theta}^{\tau}$はパラメータの第$\tau$回目の$k\times1$ベクトル値，$\lambda^{\tau}$は歩幅[15]，$\boldsymbol{\Psi}_t^{\tau}$は(20b)式で表される一階導関数の第$\tau$回目の$k\times1$ベクトル値である。

$${}^{t}\boldsymbol{\Psi}_t^{\tau}\equiv\left\{\left.\frac{\partial\log p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right|_{\theta_i=\theta_i^{\tau}}\right\}\qquad i=1,\cdots,k \tag{20b}$$

また(20a)式の右辺の逆行列は方向行列と呼ばれる$k\times k$行列を表す。もし$\boldsymbol{\theta}^{\tau+1}$が$\boldsymbol{\theta}^{\tau}$に比べ，最適値に近ければ，それぞれの値を対数尤度関数(11)式の$\log p(\mathbf{y}_t;\boldsymbol{\theta})$を除外した式に代入して，

$$\log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}^{\tau+1})>\log L(\mathbf{y};\boldsymbol{\theta}^{\tau}) \tag{21}$$

が成立する。(21)式が成立している限り，ステップが繰り返され，(6)式が満たされなくなったときに最適値$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\theta}^{\tau}$が決定される[16]。

(9)式と(14)式と(20)式より，${}^{t}\boldsymbol{\theta}^{\tau}=\left[\mathbf{b}_0^{\tau}\quad\mathbf{b}^{\tau}\quad\mathbf{c}^{\tau}\quad\boldsymbol{\alpha}_0^{\tau}\quad\boldsymbol{\alpha}^{\tau}\quad\boldsymbol{\beta}^{\tau}\quad\boldsymbol{\rho}^{\tau}\right]$であり，1変量モデルと2変量モデルの場合には$\boldsymbol{\rho}^{\tau}$が除外される。ここで，$\mathbf{b}_0^{\tau}=\left\{b_{i0}^{\tau}\right\}_{i=1}^{i=n}$，$\mathbf{b}^{\tau}=\left\{b_{ij}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=n}$，$\mathbf{c}^{\tau}=\left\{c_{ij}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=n}$，

$$\boldsymbol{\alpha}_0^{\tau}=\begin{cases}\left\{\alpha_{ii0}^{\tau}\right\}_{i=1}^{i=n} & if\quad 1変量モデルまたは3変量モデル\\ \left\{\alpha_{ij0}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=2,i\le j} & if\quad 2変量モデル\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\tau}=\begin{cases}\alpha_{1111}^{\tau} & if\quad 1変量モデル\\ \left\{\alpha_{ijkl}^{\tau}\right\}_{i,j,k,l=1}^{i,j,k,l=2,i\le j,k\le l} & if\quad 2変量モデル\\ \left\{\alpha_{iikl}^{\tau}\right\}_{i,k,l=1}^{i,k,l=3,k\le l} & if\quad 3変量モデル\end{cases}\qquad\boldsymbol{\beta}^{\tau}=\begin{cases}\beta_{1111}^{\tau} & if\quad 1変量モデル\\ \left\{\beta_{ijkl}^{\tau}\right\}_{i,j,k,l=1}^{i,j,k,l=2,i\le j,k\le l} & if\quad 2変量モデル\\ \left\{\beta_{iikl}^{\tau}\right\}_{i,k,l=1}^{i,k,l=3,k\le l} & if\quad 3変量モデル\end{cases} \tag{22}$$

と$\boldsymbol{\rho}^{\tau}=\left\{\rho_{12}^{\tau}\quad\rho_{13}^{\tau}\quad\rho_{23}^{\tau}\right\}$である。また(20a)式の右辺の$\boldsymbol{\psi}_t^{\tau}$は(23)式となる。

$${}^{t}\boldsymbol{\psi}_t^{\tau}=\begin{cases}\left[F_{1t}^{\tau}\quad F_{1t}^{\tau}y_{1t-1}\quad F_{1t}^{\tau}\varepsilon_{1t-1}^{\tau}\quad\Phi_{11t}^{\tau}\quad\Phi_{11t}^{\tau}\left(\varepsilon_{1t-1}^{\tau}\right)^2\quad\Phi_{11t}^{\tau}h_{11t-1}^{\tau}\right] & if\quad 1変量モデル\\ \left[\left\{F_{it}^{\tau}\right\}_{i=1}^{i=2}\quad\left\{F_{it}^{\tau}y_{jt-1}\right\}_{i,j=1}^{i,j=2}\quad\left\{F_{it}^{\tau}\varepsilon_{jt-1}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=2}\quad\left\{\Phi_{ijt}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=2,i\le j}\right.\\ \qquad\left.\left\{\Phi_{ijt}^{\tau}\varepsilon_{kt-1}^{\tau}\varepsilon_{lt-1}^{\tau}\right\}_{i,j,k,l=1}^{i,j,k,l=2,i\le j,k\le l}\quad\left\{\Phi_{ijt}^{\tau}h_{klt-1}^{\tau}\right\}_{i,j,k,l=1}^{i,j,k,l=2,i\le j,k\le l}\right] & if\quad 2変量モデル\\ \left[\left\{F_{it}^{\tau}\right\}_{i=1}^{i=3}\quad\left\{F_{it}^{\tau}y_{jt-1}\right\}_{i,j=1}^{i,j=3}\quad\left\{F_{it}^{\tau}\varepsilon_{jt-1}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=3}\quad\left\{\Phi_{iit}^{\tau}\right\}_{i=1}^{i=3}\right.\\ \qquad\left.\left\{\Phi_{iit}^{\tau}\varepsilon_{kt-1}^{\tau}\varepsilon_{lt-1}^{\tau}\right\}_{i,k,l=1}^{i,k,l=3,k\le l}\quad\left\{\Phi_{iit}^{\tau}h_{jjt-1}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=3}\quad\left\{G_{ijt}^{\tau}\right\}_{i,j=1}^{i,j=3,i<j}\right] & if\quad 3変量モデル\end{cases} \tag{23}$$

---

[14] Berndt E., Hall B., Hall R, and Hausman J. (1974)を参照。
[15] 次号以降の「アルゴリズム編」でも，この値は恣意的に決定される値である。
[16] 和合・伴(1995 p. 62)は最尤推定による次の4つの留意点を挙げている。尤度が複数の点で局所点に最大となることがある。尤度が無限大になり，推定値が計算できないことがある。尤度を計算する途中で関数計算でエラーが発生することがある。モデルが理論的整合性に欠けることがある。

である。ここで，F_{it}^{τ} と Φ_{it}^{τ} は(24)式であり，それ以外の変数は(19)式の最適値記号(∧)を上付きのステップ記号(τ)に変えた値となる。

$$F_{it}^{\tau}=\begin{cases}\dfrac{f_{it}^{\tau}}{\Theta_t^{\tau}}, & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} n\text{変量正規分布},\\ \dfrac{(m+n)f_{it}^{\tau}}{n\Theta_t^{\tau}+\Omega_t^{\tau}}, & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} n\text{変量}t\text{ 分布}.\end{cases} \qquad \Phi_{1t}^{\tau}=\begin{cases}\dfrac{1}{2h_{1t}^{\tau}}\left(\Omega_t^{\tau}-1\right), & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} 1\text{変量正規分布},\\ \dfrac{1}{2h_{1t}^{\tau}}\left\{\dfrac{(m+n)\Omega_t^{\tau}}{n\Theta_t^{\tau}+\Omega_t^{\tau}}-1\right\}, & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} 1\text{変量}t\text{ 分布}.\end{cases}$$

$$\Phi_{ijt}^{\tau}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{j-i}}{2^{i-j+1}\Theta_t^{\tau}}\left\{\left(\dfrac{\Omega_t^{\tau}}{\Theta_t^{\tau}}-1\right)\varepsilon_{3-jt}^{\tau}\varepsilon_{3-it}^{\tau}-h_{3-j3-it}^{\tau}\right\}, & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} 2\text{変量正規分布},\\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{i-j+1}\left\{\dfrac{(m+n)\left(nh_{3-j3-it}^{\tau}+\varepsilon_{3-jt}^{\tau}\varepsilon_{3-it}^{\tau}\right)}{n\Theta_t^{\tau}+\Omega_t^{\tau}}+\dfrac{h_{3-j3-it}^{\tau}}{\Theta_t^{\tau}}\right\}, & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} 2\text{変量}t\text{ 分布}.\end{cases} \quad i,j=1,2,\quad i\le j \tag{24}$$

$$\Phi_{iit}^{\tau}=\begin{cases}\dfrac{1}{2h_{iit}^{\tau}}\left(\dfrac{f_{it}^{\tau}\varepsilon_{it}^{\tau}}{\Theta_t^{\tau}}-1\right), & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} 3\text{変量正規分布},\\ \dfrac{1}{2h_{iit}^{\tau}}\left\{\dfrac{(m+n)f_{it}^{\tau}\varepsilon_{it}^{\tau}}{n\Theta_t^{\tau}+\Omega_t^{\tau}}-1\right\}, & if \quad \tilde{\varepsilon}_t \overset{p.d.}{\sim} 3\text{変量}t\text{ 分布}.\end{cases} \quad i,j=1,2,3$$

[6] 初期値

最後に初期値を設定する。n 変量 VARMA(1,1)-GARCH モデルの初期値を決定するとき，最尤推定値の近傍にあるだろうと思われる値であるならば，ステップも少なくてすむ。そこで次式の n 変量 VAR(1)モデルの OLS 推定値を最尤推定法の初期値とし，(14)式の $\mathbf{c}$ の初期値を $\mathbf{c}^1=\mathbf{0}$ として考えることにする[17]。

$$\begin{bmatrix}{}^t\mathbf{b}_0^1 & \mathbf{b}^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{t=2}^{T}\mathbf{y}_t & \sum_{t=2}^{T}\mathbf{y}_t{}^t\mathbf{y}_{t-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T-1 & \sum_{t=2}^{T}\mathbf{y}_{t-1}\\ \sum_{t=2}^{T}\mathbf{y}_{t-1} & \sum_{t=2}^{T}\mathbf{y}_{t-1}{}^t\mathbf{y}_{t-1}\end{bmatrix}^{-1} \tag{25a}$$

ここで，

$${}^t\mathbf{b}_0^1=\begin{bmatrix}b_{10}^1 & \cdots & b_{n0}^1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}^1=\begin{bmatrix}b_{11}^1 & \cdots & b_{1n}^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1}^1 & \cdots & b_{nn}^1\end{bmatrix},\qquad {}^t\mathbf{y}_t=\begin{bmatrix}y_{1t} & \cdots & y_{nt}\end{bmatrix} \tag{25b}$$

を表す。また n 変量 GARCH モデルのパラメータの中の定数項 $\alpha_{ii0}(i=1,\cdots,n)$ の初期値を α_{ii0}^1 として(26a)式で与えることにする。さらに，3 変量モデルの場合は誤差項の相関係数 ρ_{ij} の初期値を ρ_{ij}^1 として(26b)式で与えることにする。

$$\alpha_{ij0}^1=\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_{it-1}^1\varepsilon_{jt-1}^1=\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T}\left\{y_{it}-\left(b_{i0}^1+\sum_{k=1}^{2}b_{ik}^1y_{kt-1}\right)\right\}\left\{y_{jt}-\left(b_{j0}^1+\sum_{k=1}^{2}b_{jk}^1y_{kt-1}\right)\right\} \tag{26a}$$[18]

$$\rho_{ij}^1=\frac{\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_{it-1}^1\varepsilon_{jt-1}^1}{\sqrt{\sum_{t=2}^{T}\left(\varepsilon_{it-1}^1\right)^2\sum_{t=2}^{T}\left(\varepsilon_{jt-1}^1\right)^2}}=\frac{1}{(T-1)\alpha_{ii0}^1\alpha_{jj0}^1}\sum_{t=2}^{T}\left\{y_{it}-\left(b_{i0}^1+\sum_{k=1}^{3}b_{ik}^1y_{kt-1}\right)\right\}\left\{y_{jt}-\left(b_{j0}^1+\sum_{k=1}^{3}b_{ik}^1y_{kt-1}\right)\right\}\quad (i,j=1,2,3\quad i\ne j\quad i\le j) \tag{26b}$$

[17] ARMA モデルの場合には多重共線性が生じるために，すべてのパラメータの初期値をゼロとして設定できない。
[18] 2 変量モデルの場合は $i=j=1,2$,$i\le j$ とし，3 変量モデルの場合は $i=j=1,2,3$ とする。

[7] むすびにかえて

本稿では多変量VARMA-GARCHモデルの最尤推定量の導出とBHHH法による最尤推定値を求めた。次号以降の「アルゴリズム編」では，データの定常性や誤差項の条件付分散に関する非負条件などを考慮して，本稿で求めたBHHH法による最尤推定値をシミュレーションを使って導出するとともに，検定量を検証する。

[8] 参考文献

Berndt E., Hall B., Hall R, and Hausman J. (1974), "Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models," *Annals of Economic and Social Measurement*, 3-4, pp. .542-665.

Bollerslev, T., (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," Journal of *Econometrics*, 31, pp. .307-28,.

------------, (1988) "On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process," *Journal of Time Series Analysis*, 9, pp. .121-31.

Bollerslev, T., R.Y. Chou, and K.F. Kroner,, (1992) "Arch Modeling in Finance," A Review of the Theory and Empirical Evidence, *Journal of Econometrics*, 52, pp. .5-59.

Engle, R. F., (1982) "Autoregressive Conditional Geteroskedasticity with Estimates of the Variances of the UK Inflation," *Economatrica*, 50, pp. .987-1007.

Engle, R. F. and T. Bollerslev, (1986a) "Modeling the Persistence of Condtional Variances," *Econometric Review*, 5, pp. .1-50.

--------, (1986b) "Modeling the Persistence of Conditional Variance: A Reply," *Econometric Review*, 5, pp. .81-87.

--------, (1991) "Semiparametric ARCH Models," Journal of Business & Economic Statistics, 9, pp. 345-59.

Engle, R. F. and C. W. J. Granger, (1987) "Co-Integration and Error Corrections Representation, Estimation and Testing," *Econometrica*, 55, pp. .251-76.

Engle, R. F. and Lilien, D. M., and Robins, R. P., (1987) "Estimationg Tiem Varying Risk Premia in the Structure: the ARCH-M Model," *Econometrica*, 55, pp. .391-407.

Geweke, L., (1986) "Modeling the Persistence of Condtional Variance: A Comment," *Econometric Review*, 5, pp. .57-61.

Harvey, A. C., (1981) *The Econometric Analysis of the Time Seiries*, Oxford, Phillip Allan, New York, Wiley, 2nd ed., 1993.

Pantula, S. G., (1986) "Modeling the Persistence of Condtional Variance: A Comment," *Econometric Review*, 5, pp. .71-73.

Weiss, A. A., (1986) "Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing," *Econometric Review*, 2, pp. .107-131.

Zin, S. E., (1986) "Comment," *Econometric Review*, 5, pp. 75-80.

中川裕司 (1996) "多変量収益率の時間依存型ボラティリティの導出—多変量 VAR-GARCH モデルのケース—(Deriving Heteroskedastic Volatilities of Multiperiod Returns –Multivariate VAR-GARCH Model--)," 岐阜経済大学論集 (The Journal of Gifu Keizai University) 第30巻第2号 pp.41-63.

山本拓 (1988) 「経済の時系列分析」,創文社.

和合肇・伴金実 (1995) 「TSPによる経済データの分析(第2版)」,東京大学出版会.