岐阜経済大学論集 30 巻 3 号（1996 年）

〔研究ノート〕

大学授業研究；大学で何を教えるか

一　柳　正　和

1　はじめに

大学での講義をどのように進めるかというテーマでの研究は，必要であるにもかかわらず，教員相互の壁に阻まれて進んでいない。この小論では，統計学と数学（線形代数学）の講義を例にとって，大学での授業創造の試みを紹介する。

「大学で何を教えるか」というとき，大学進学率の上昇ということを考慮に入れるべきであるとよく言われるが，筆者はこの意見に賛同しない。我々大学人が責任を負えないところに問題点をすり替えていくきらいがあ

るからである。また，学生の気質が昔と変わってきているとか，学力（どんな?）が低下してきているといった事柄は進学率の上昇を主要因に持つわけでもない。また，「何のために――」という目的が先行する議論にも与しない。筆者は，未来の青年達にとって役立てる（一般）教養がどの程度必要かの視点を重視する。

「大学で何を教えるか」を議論するとき，講義を理解するということはどんなことかを先ず明らかにしておかなければならない。初等，中等教育のレベルだと「わかった」ということと，「覚えた（暗記できた）」ということが類似することが多い。暗記するとは，一切の過程を排除して単に結論だけを覚えることである。因に，テストとは，後者の度合を調べるようなものであるかもしれない。しかし，「わかった」という漢字は多い；解る，分かる，判る，別ける，修める，知る，意識する，知覚する，等々。講義を理解するとは，どの「わかった」に対応するのであろうか。また，学問の基礎を離れたところでの「分かり易い講義」というものにも筆者は疑問を持っている。学ぶ（study）ということは，努力する，工夫する，苦心するということに違いなく，楽に即座に勉強できるということ自体，形容矛盾である。中国には，「書を学ぶは急流を遡るが如し」という金言がある。また，ギリシャの諺に「学問は易しくもなければ難しくもない，単に分かっているか，分かっていないかである。」とある[1)]。

何年か前のことであるが，この点と少し関係のある落書きを，学内で拾ったことがあるので紹介しておこう。

『「面白い授業とは」

「おもろい授業」；授業は勉学にいそしむ時間であり，しょせん授業は授業であるのになぜ「面白い授業」というようなものがあるのか。それならば「おもしろくない授業」とはどんなものであろうか。この二つはどことどこが違うのであろうか？ どうして「おもしろい」，「おもしろ

くない」の差が出てくるのであろうか？ これを比較して考えていきたい。授業にはどのようなポイントがあるだろうか。パッと思いつくものは次のようなものだろう。雰囲気，内容，分かり易さ，時間といったようなものであろう。一つ一つについて見ていきたい。まず，雰囲気。「面白い授業」では，私自身の感覚であるが，とても落ち着いた和やかなものである。このような雰囲気であれば，大変リラックスすることが出来，集中力も増進すると思われる。しかし，和やかといってもポイントである。和やか過ぎて，受講生達が自分勝手に授業に関係のないおしゃべりをし，騒ぎ出すのも困ったものである。そうしない為には，生徒達を授業に集中させつつリラックスさせるというような教師の掛け引きが重要であろう。ポイントとしては先で述べた「内容」，「分かり易さ」といったものが浮かびあがってくる。「内容」は，中味の無いものを長々とするのではなく，要点をきっちりとまとめて効率良いものにし生徒達にも充分に理解できる「分かり易さ」が必要だろう。（教師とは大変なものだ）』

大学の講義は学者を育てるのではないと言いながら，細かで専門家でなければ必要としないかもしれないような知識（或いは，事実の羅列）を押し付け，未来を開く青年として必要な，一般的で基本的な概念や法則の学習という視点を欠いていないだろうか。以下の展開で示すように筆者は，このことを次のように考えている。例を，将棋にとって見よう。将棋は難しいと言うが，簡単であるとも言える。将棋の駒の特性を理解することは，簡単なことに違いない。たとえプロの手合いであったとしても駒の特性を理解していれば，解説者の説明を理解することはできるであろう。勿論，駒の特性を知ることは，将棋を楽しむのに不可欠であるが，これで充分である訳がない。詰め将棋を教材にして，繰り返し「演習」をしたり，プロの手合いを並べて「習作」することなどが必要である。大学の講義をこの

例に準えるならば，我々の任務は，学生が「解説者の説明を理解する」段階に達するよう手助けをすることではないだろうか。

2　統計学で何を教えるか

統計の特徴は，複雑多岐な資料を簡単明瞭な数値で言い表わすことであろう。もう少しありていに言うならば，統計学は，具体的なものから出発して抽象的なものに至る数学的考察のことである。これは極めて高度な抽象化の手法である。どんな対象に対してでも数学的手法が有効であるわけではないが，我々の目的は，数学的に表現することによってしか捉えることのできない本質的内容を，統計資料に見出すことである。従って，沢山集められた資料も，最終的には簡単な数値に纏められて，重要な意味を持たせるところに統計の強味がある。この意味で，我々は調査をできるだけ詳しく行う必要がある。また，既存の資料を駆使して意味のある統計値を求めることも必要である。しかし，統計資料は誰かが意図した内容に沿って「作り出された」ものである。現実の対象は，自然現象であれ社会現象であれ複雑多岐であり，かつ多面的であるから，本質をえぐり出すために，現実を抽象化したり，他の量との関連性をひとまず無視して理想化したりしたモデルを考えることがあるが，統計資料は直接的資料である限り意味を持つ。

数学の特徴の一つは，論理的であるけれども所謂，真理とは無関係であり，可能性については語れるけれども，現実性に関しては何も示さない点にある。ここで要諦は，資料の背後にある現象に対しては，統計学とは独立の，対象に固有の学問理論が措定されていることにある。従って，「意味のある統計値を求めること」及び「現実性の条件を求めること」は後者の理論に依ってしかできない性質の事柄である。

ここで，平均値を例にとって蛇足を加えておこう。平均値には，算術

（加算）平均，幾何平均，調和平均等がある。この他の標準的な統計量として大切な概念が分散（標準偏差）である。どれを採るかは，資料の性格と背後の理論に依って決まる。似かよった数値群の場合には，算術平均を採ることは合理的であるが，桁外れの数値の混在する資料の場合には，他の平均値を用いなくてはならない。学校教育の場では，平均点（大抵は，算術平均）なるものが，その意味合いとは関係なく一人歩きをしている。筆者は小学生の頃，この平均点について，「何故，平均点（時には，小数点以下何桁かであった）をとった者がいないのだろうか？」という解き難い疑問を抱いたことがあった。算術平均の場合には，母数が少ないときには何時でも平均点をとった者がいないことになるようだと（数学的に）理解したのは大学に入ってからであった。平均値を出来るだけ大きく与えるためには算術平均を用いるのがよいということもその頃知った。

2-1　資料の整理と理論

講義で使っている教科書は，猪野富秋，伊藤正義両氏の『数理統計入門』（森北出版）である。教科書はある病院での新生児（母数50）の体重測定

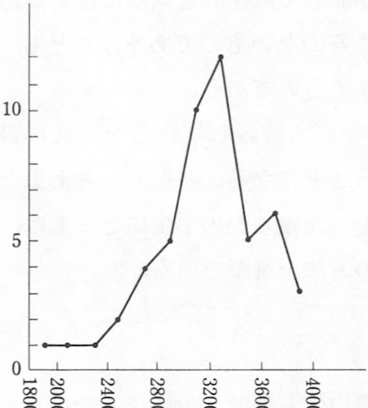


図1　度数折れ線

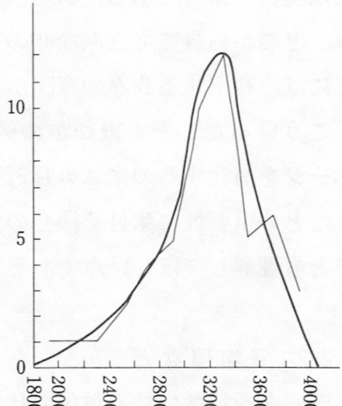


図2　度数曲線

のデータの解析を例にして統計の特徴を説明していく。先ず，生のデータを度数分布表を使って整理し，図1のような度数曲線を得る。得られた特徴は主峰の隣に副峰が現われた所にある。副峰の意味は何だろうか，意味あるものなのだろうか等，疑問が湧くに違いない。教科書ではこれを図2のように実線で塗りつぶしてしまう（改造すると言う）が，そのことに関係した何の解説も加えていないのは何故なのであろうか。講義の主眼は，学生諸君にこの周辺の問題を考えさせることにある。と言っても，1年生には「何を考えればよいのか」分かろうはずがない。そこで，同じ生のデータを使って級間隔の幅を変えた整理を幾つか試みる。すると当然ながら，副峰は現われることも消滅することもある。このことは，度数分布表を作る際の級間隔の幅は，統計学からは自動的に決まらず，対象に則して別の理論によって決めなければならないことを意味している。また，副峰の存在こそはデータを取る前に重要な因子として，予め位置付けられていたものであるかもしれない。このような研究目的からすると，副峰が強調されるようにデータの整理（今の例では，級間隔の幅）をしなければならない。数学というと「答えは一つ」と思い込んでいる学生にとっては，こうした発見は驚きのようである。ある前提から出発して数学的な結論に達する道筋は，どこから見ても立派な非のうちどころのないものであるけれども，そこには，利用する我々の意図が見え隠れするのである。

こういったことを幾つかの例を示しながら解説していると，教科書数ページを消化するのに2カ月近く要することになる。しかし，考えるということの重要性に気付く機会の持てなかった幾らかの学生にとっては，是非とも理解してほしい点であるからこの方法を選んでいる。

2-2 平均値など

データを特徴付ける数値の代表例が平均値と分散（標準偏差）である。この節を扱う講義では，平均値には幾種類かあることを先ず理解させること

を目標にする。日頃使われているこの平均値が，データのどのような側面を抽象化したものであるかを理解することが，ここでの学習の目的である。ある学年の一つのクラスを特徴付けるとき，ある科目の平均点だけでは不十分であることは直ぐ理解できる。だとすると平均値と何なのだろうか。例えば，半数が 0 点で他の半数が 100 点の場合の平均点は，計算可能であるが意味がないことは自明である。しかし，学生に理由を問うても答えられないことが多い。3 分の 1 が 0 点，3 分の 1 が 50 点，3 分の 1 が 100 点である場合はどうか。二つの場合の比較から算術平均の意味は少し明らかになる。平均値が同じデータでもそれらは少しも似ていないのである。このことを手っ取り早く表現したものが，分散であることは言うまでもない。分散から標準偏差を求めるには，平方根を開かなければならないが，これは自明な場合以外には容易く求められる性格のものではない。この二つの概念を結び付けて考察してみると，平均値を算数の計算として真面目に求めることが，いかに無益なことかも理解できよう。

算術平均の他の幾何平均については，次のような例を用いてその意味を解説することにしている。簡単のために，4 組の数『1，10，100，1000』の平均値を計算してみよう。算術平均ならその値は，278 である。問題は，この値が不自然なものであるかないかである。仮に，1000 に比して 1 を小さいとしてこのデータから排除して平均値を求めると 1110 ÷ 3 = 370 となる。さらに進めて，1000 に比して 10 まで排除してしまえば，算術平均値は 550 になる。一方，幾何平均値を計算するとその値は約 32 になる。1000 に比して 1 を小さいとしたときの値は 100 であり，さらに 10 までも排除するとその値は，316 である。これら 6 個の平均値のどの値を採用するかは，統計学では決まらない。調査対象に即した理論的考察が不可欠である。算術平均の場合ならば，標準偏差をそれぞれの場合について求めれば，ある程度まで判定することは不可能ではない。しかし，講義の狙いからすると，この例のように桁の異なるデータの算術平均を求めること

は意味のないことであることを，理解して欲しいのである。

我々が統計値を問題にする場合には，大きく分けて2種類のデータがあることを講義では強調する。一つは母集団から切り取ってきた標本集団についての統計値であり，もう一つは測定にかならず付きまとう根元誤差に関するものである。例えば，1グラムの金塊を天秤で正確に測定することを考えてみよう。一方の皿に錘を乗せて秤の針の示す目盛を読み取る。このとき，少なくとも二つの誤差が介入する。読み取り誤差と，錘自体の持つ根元誤差である。測定を繰り返すことで得られたデータの平均値は，1グラムに近いものであるに違いないが，それでも平均値の周りにばらついているものである。このばらつきは，標準偏差によって定量化される。こうした事柄は誤差論に属する。18世紀にガウスは，測定（観測）誤差の分布は，測定回数を限りなく大きくすると正規（分布）曲線[2)]になることを証明した。このことは，中心極限定理と呼ばれている。

一般に，統計学に限らず数学的考察は，個別性はひとまず無視して，対象の持つ普遍性をえぐりだすために共通の用語を用いて行う。しかし，展開して得られた結論を現象（ないし現実）に即して解釈するときには，無視されていた個別性（と特殊性）がもはや無視できなくなる。

統計学は数学の手法を用いるからといっても，それは計算の手続きだけに尽きない。計算の手続きは，将棋の駒の働きを理解することに似ている。複雑な計算を自ら楽しんでもよいし（何故なら，計算を具体化することではじめて理解できる側面もあるから），そこに至る経緯の解説を聞いて，理解してもよい道理である。計算それ自体は時には楽しいものであるに違いないが，我々の本能寺は，別のところにある。

2-3　確率とは何か

日常目にする（自然および社会）現象の中には，確率的現象と考えられるものが多い。確率と言うとき，従来だと我々の無知の尺度と考えられ，決

定論に対立する概念として理解されてきた。このことを（古典）確率論では，「同じ試行を独立に多数回，繰り返したとき，ある事象が生起する割合が，ある一定の値に近づくならば，その値をその事象の確率という。」と定式化している。ここでの試行という概念は，複雑であるなどの理由によって，決定論的に扱うことのできないことを含意している。しかし，過去30年ほどの物理学の発展により，二つは決して対立するものでないことが分かってきた。つまり，決定論的法則に従う現象に，カオスと称される確率的現象が発現するのである。典型的例は，気象学の熱対流現象である。個の現象を記述する法則（微分方程式系で書かれたもの）は，決定論的であるにもかかわらず乱雑に変化する解を持っていたことが見つかったのである。比喩的に，ラッシュ時の東京駅をモデルにしてカオスを説明してみよう。各列車は決定論（ダイヤ）に従って運転されているとする。学生群と，7時に到着して最初に来た列車に乗ると約束して旅に出たとしよう。この時刻頃に出発する列車も何本かあるだろう。すると，約束の時間に少し遅れた何人かの学生もいるだろうから，仮に宿を一団で出発したとしても，約束の時間の数秒後ならまだ全員が比較的近くにいるが，7時10分頃にはもはや学生群はちりぢりばらばらになっていることを容易く思い描くことができよう。このように初期条件が少し違っていたに過ぎないのに，その後の挙動は全く異なってくるのである。これも，カオス現象と呼ばれているものの一つである。氷河期が間欠的にやってきたことや，古代文明を生み出した最適気候期，今世紀前半の温和気候等は地球内部の運動によるカオス現象[3)]であるという主張もある。医学では，ある種の病状の脳波の解析に利用されている。矛盾する二つの概念が本質的に関連しあっていたという発見であり，科学革命の一つと称されている。カオスという概念は，物理現象のみでなく生命現象，経済現象等ひろく見受けられる現象であり，確率という概念にも新たな内容を付け加えた。

さて，我々の研究の対象は多くの場合極めて複雑なものであり，事実と

称されるものはそれなりに重要であろうが，それ以上でも以下でもない。我々が重視するのは，事実の羅列ではない。背後の法則が知りたいのである。しかし，データを整理しそこから法則的な事実を見つけ出すとき，確率概念が重要になる場合が少なくない。今日の確率論は，具体的な確率的現象を表象に思い浮かべながら，それらを抽象化した数学の一つの分野である。統計の基礎に続く後期の講義のテーマは，この確率概念の解説である。学生の多くは，サイコロによる確率の考え方を，既に学んできている。それゆえ，確率の計算の幾分かは既に習得しているとして，講義を組み立てることもできよう。しかしそれでは，天気予報での雨の降る確率とサイコロの目の出る確率との区別を，理解することはできないであろう。初等確率論の基本的定理に大数の法則と中心極限定理がある。大数の法則は，サイコロを例にした確率概念にきっちりとした数学的基礎を与えるものであり，試行回数を出来るだけ多くすればどの目も同じ確率をとるであろうといった直観的な説明で，ある程度のところまでは理解できよう。しかし，チェビシェフの定理の意味で大数の法則を捉え直さなければならないので，根元事象，標本空間，確率変数，確率事象の独立性といった概念の理解がポイントになる。初等確率論の諸定理は，根元事象の数が無限個の場合にも適用されるが，無限個の確率事象を扱うためには，初等確率論に新しい原理を追加しなければならない。

確率論を学ぶとき根元事象の集合という考え方が一つのキーワードなのである。従って，講義では，根元事象とは何か，集合とは何かというテーマが先ず取り上げられる。根元事象は，同じ試行を独立に，多数回繰り返したときに現われる識別可能な事象のことである。サイコロの場合ならば，1から6までに目の出る事象のことである。離散的確率変数を対象にする間は，集合といっても有限個の根元事象の集合（古典確率論はこちらの場合である）を対象にするので有限集合の演算を考えればよいから，これも初等教育の段階で学んできたことがここで役に立つ。根元事象の方は，高

度に抽象化された概念であるから，時間をかけて解説していくことになる。この作業は，集合論の近傍概念と測度の考え方を念頭に据えたものであるから大変であるが，ここをしっかりおさえておかないと，雨の降る確率とサイコロの目の出る確率の違いは説明できない。前者の場合の根元事象の集合には，無限個の事象が含まれていて，古典確率論で言う「割合」をサイコロの場合のように「比率」で定義するとき特別の注意を払わなくてはならない。

「独立の試行」というところが，確率論を利用する場合に特別に注意を払わなければならない点である。例として，野球の場合の打率を，サイコロを投げる場合の確率と比較してみよう。打者は１打席目と次の打席と「独立に」打席に入るわけではないから，独立な試行に当たらないので確率論は利用できないように思える。しかし，投手の側から見るとどうか。やはり前の打席での投球を忘れてしまっているわけではない。草野球の場合だと，試行の独立性は良く保証されているであろう。プロ野球ならばどうか。そこでも独立性が保証される理由が存在する。打者も投手もどちらも最高に頭脳的にプレイをするとすると，両者の戦略が対立するから結果的に双方の戦略は無かったも同然となり，独立な試行が実現するわけである。近年のプロ野球やマージャンのような室内ゲームを思い起こすまでもなく，「最高に頭脳的にプレイをする」という条件を欠くと何故，確率論が使えなくなるかは自明であろう。この例のような，競合戦略モデルを用いる理論が，ゲームの理論である。モデルの中には経済現象を対象とするものが沢山開発されている。よく「経済現象には対立する利害が混在しており，数学的モデルに現実味がない」と批判する意見を耳にする。しかし，考えてみると，そうした謬論はそもそも科学とはなんたるかを知らない故に，なされるものであることが分かる。具体的経済現象は，千変万化するものであり，必要以上に詳細を極めれば一度きりしか起こりえないものであり，そもそも認識の対象にもならない。何故なら，一度きりの現象

なら，法則的であるなしは，問題にも上がらないからである。さらに言えば，認識作用とは，既知のものと未知のもの（既知のものと既知のものと言っても同じである）の比較という作業だからである。経済学的考察は，数学的モデルによる帰結と，現実に測定された結果の差の意義を具体的に分析するときに必要なのである（抽象から具体的なものへの道；4-1 節参照）。

3　数学で何を学ばせるか

文系の学生は，本当に算数や数学が嫌いなのだろうか。少し以前までは「算数は嫌い」という学生は予想されるほど多くはなかった。大学に進学できたものなら，小学校で算数が寧ろ得意であったことは当然であると思える。学年が進むにつれて，数学が不得意になる生徒が増えていくのは残念ながら事実のようである。このことの意味するところは，計算のように手順の分かった事柄についてはそれほど嫌いでもないということである。このことを念頭に置くならば，大学数学の講義においても，「計算」に力点を置いて進めるという教授法が用いられなければならない。実際に，数学を使う立場に限定して，自然や社会の現象を理解することに目的を移してもよいわけである。然しながら，小学生ならいざ知らず，大学生の視野に入ってくる社会現象等は，複雑な要素がそれこそ錯綜したものであり，数学で処理できるものではない。このことの故に，「数学は社会科学には役に立たない」と結論されることがある。こうした事態を少しでも改めるためには，現代数学の特徴を利用する立場から離れて理解しておかなければならない。筆者の考えでは，やはり学問の基礎ということを離れて「分かり易くする」ということは正しくないと思う。

数学の特徴は，何といっても抽象性，厳密性，適用範囲の広さ等である。抽象的であると言うとき，用いる概念が抽象的であるだけでなく展開の方法もまた抽象的である。しかし，数学は人類の実践から出発したもの

である。数の体系をとってみても，それは抽象的に純粋な形式で考察したときの，実在の量的関係に裏付けられたものであることが分かる。筆者の数学の講義内容は「線形代数学の基礎」であるが，最初の数時間は数学の歴史に充てている。そこでは先ず「計算」と数学的考察とは，ひとまず無関係であることを強調することにしている[4)]。時として計算は複雑であり，それには計算ミスが付きまとうので，複雑さが「数学は難しい」とされる理由になる。しかし，その複雑さはプロの将棋の複雑さに似たことであり，数学にとっての本質的部分では決してない。第2に，数学の証明という論理の特徴を解説する。「三角形の内角の和は180度である」なる定理を紙の上に具体的に三角形を書いて内角を実測してこの定理の通りであることを示しても証明にはならない。何故なら，この定理に言う「三角形」も「180度」もどちらも一般的で抽象的なものであるからである。ピタゴラスの定理の証明においても，数学的手続きは同様である。実測不能の辺の長さ（例えば，ルート2）の存在を避けてとおることはできない。

次に，講義では，数学の証明手続きの論理的理由を例を挙げて説明することにしている。それには次の見事な解説を，利用することにしている。「殺人とみられる事件で，アリバイ調べをした名探偵が，容疑者が一人に絞られてもそれだけでは犯人と決めつけない。論理に飛躍はないか？と逐一検討していく。疑いなく殺人事件であるということを示さなければ，無実の容疑者にヌレギヌを着せてしまう。殺人事件ならば彼以外に犯人はありえないとしても，殺人事件でなければ犯人はいない。ある数学の問題に，解があるならばそれに限るとしても，その問題には解がないということが真理だとしたら，当初のものは解ではない。解が存在するという保証を求めることこそが，検討すべき本当の問題なのである」（小川泰『形の法則』東京化学同人，1994年所収「訳者あとがき」より）。

3-1 「ベクトルと行列」の講義のねらい

講義の目的を，ベクトルとか行列の演算技術の習得（一般に採られている方向ではあるが）に置くことは，いきなりプロ棋士と将棋を指すようなもので，初学者にとっては大変に分かりにくい退屈なものになるであろう。それゆえ筆者の講義では，これらの計算方法（演算公式）は，自然数の加法と同工異曲であることを繰り返し強調している。このことを理解するためには，数学の抽象的方法のうちの「対応」ということの実践的意義について述べておかなければならない。自然数の一つ一つは，いつでも具体的な「物の集合」を前提して「対応」（小石を並べる，指を折って数える等）という操作を介して「名前」が付されたのであるが，次第に「物の集合」から抽象化されてきた。このことが，生活上の事柄とは関係の無い数学的興味を，人類の精神活動に齎した。しかし，具体的な加減乗除の演算を利用する段になると，忘れられていた「物の集合」が顔を出すことがある。このことで抽象物と具体的なものとの「対応」の確かさが再確認されているのである。

線形代数は，「対応」という単純な思考方法を体系化したものであると言うこともできる。つまり，自然数と「物の集合」の対応という方法の特性をそっくりそのまま保持した「数」と「抽象的な或もの」を対応させる方法である。何の目的で？ 後者の持つ特徴を，前者の特徴に照らして理解したいからである。ベクトルも行列も「抽象的な或もの」に属する概念である。具体的に見ると，数の配列がベクトルであり行列である。どちらもある規則に従って数が並べられたものであるから，例えば，自然数の特性を保持しているであろうことは容易に理解できる。ベクトルの場合には，和と積（内積）に関しては自然数の四則演算の公式を完璧に踏襲している。さらに，行列の和についても同型の公式が成り立っている。つまり，この点では，ベクトルと行列を自然数と区別する理由はどこにも見当たらないのである。そうであるにもかかわらず，少なくない人達はベクト

〔ベクトルの和の公式〕

[1] $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

[2] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

[3] $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

[4] $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$

[5] $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

[6] $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

[7] $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$

[8] $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

〔行列の和の公式〕

[1] $A+B=B+A$

[2] $(A+B)+C=A+(B+C)$

[3] $A+O=O+A=A$

[4] $A+(-A)=(-A)+A=O$

[5] $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

[6] $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

[7] $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

[8] $1A=A$

〔ベクトルの内積の公式〕

[1] $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\rangle$

[2] $\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\rangle+\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$

$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle+\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\rangle$

[3] $\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$

$\langle\boldsymbol{a},\ \mu\boldsymbol{b}\rangle=\mu\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$

[4] $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\rangle\geqq 0$　（等号が成り立つのは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$ のときに限る）

ルや行列は「難しい」と言う。ここで，将棋の例を思い出してほしい。計算が複雑であり，とても覚えきれないということを「難しい」と誤解しているに過ぎないのである。計算が嫌いな人は，計算などしなければよいのである。計算は電卓でも使えばすむことであり，「九九」なんぞ忘れていたって，いっこうに差し支えない。そうではなく，大学の数学では，自然数の性質や小学校で習った算数をベクトルとか行列に利用するという数学の考え方を，理解する道を選べばよいのである。

ベクトルと行列の特徴は，四則演算のうちの積の演算に現われる。ベクトルの積（外積）と行列の積は掛ける順序によって結果が異なるという点で，自然数の掛け算と大変に異なるに過ぎない。

行列の演算の応用例として連立方程式の解法を取り上げる。ここには二つの目的がある。一つは，鶴亀算を行列を用いて定式化すると，機械的に解を求めることができるという便利さを強調することである。もう一つは（こちらの方がウンと重要なのだが），解く前に予め「解の存在」を証明すると

いうことの重要性を理解することである（前述の小川氏のコメントを参照）。

3-2 線形写像

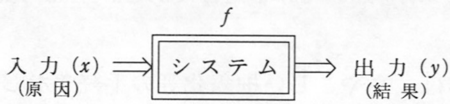
ベクトルや行列のように加法に関する公式が，自然数の場合と同型であるものを区別する必要はことさらない上に，同型のものは無数に考えられるので，これらを全部ひとまとめにして線形空間（ないし，ベクトル空間）と呼ぶ。この空間で定義される写像のうちで，最も簡単なものの一つが線形写像である。ある対象に別の対象が一意的に対応しているということが線形写像の内容である。戦前までは，関数は「函数」と書いた。これは中のメカニズムを問わないで，装置（ブラックボックス）の「働き」を強調する用法である（表１参照）。

写像は，「対応（１対１対応）」の抽象化された数学的概念である。なかでも線形写像は，１次関数の一般化に当たる。誰もが中学校で２次関数までは教わってきたと思う。学校教育では関数fの働きを，「独立変数xがある値をとったときに，従属変数 $y\,(=f(x))$が決まる」と解釈している。このことを写像の言葉に直すと，「xをyに対応（写像）させる」ということである。関数形が写像の数学的性格を決定することになる。従って，講義の目標は，中等教育で学んだ関数のイメージを手掛かりにしながら，関数の「働き」という（現代化された）側面を理解させることに置かれる。このように関数とは対応に他ならないことを明らかにしたのは Dirichlet (1837) であった。

線形写像をナイーブに定義してみると，「$b=f(a)$，$b'=f(a')$ のとき，$b+b'=f(a+a')$ となる」写像のことである。原像の方（aの集合）での加法と像（bの集合）の加法と１対１に対応することを主張する。原像の方の加法に関する特性を像の側に写して研究することができることになる。ここに線形写像の威力（数学的意義）がある。表１の例では，ダムや自動車はこの条件を（概念的に）満たしているから線形写像である。自販機の場合

表1　対　応（写像の意味）

f	$x \rightarrow y$
ダ　　ム	水　力 → 電　力
自 販 機	お　金 → 品　物
電 熱 器	電　力 → 　熱
自 動 車	燃　料 → 仕　事（走行）
電 話 機	電　流 → 音　声
生　　物	刺　戟 → 応　答



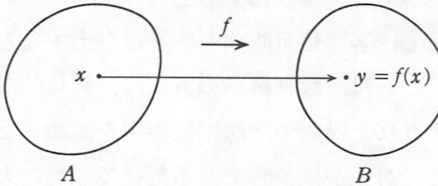


図3　写像と関数

は，単品目の機種ならば線形写像に当たるけれども，多品目の機種の場合にはそれに該当しない（非線形写像という。実は，こちらの概念の方が圧倒的に多い）。これらの例のように関数は，数式で表現されるものからそうでないものまで含めて幾らでも存在し，それらは同じ数学的構造を持っているのである。数学を理解する上で，公式や記号の働きを知っておくことが重要であるので，これらの例を手掛かりに，学生諸君が線形写像のイメージを作り上げるまで，ゆっくりと急がずに，講義を進めていくことにしている。

こうした説明は何だかこじつけのように受け取られるかもしれない。しかし，数学の本来の方法論に従って展開してきたまでである。数学は，具

体的なものの持つ要件を無視して，幾つかの分野に共通の規則性を発見するところにその特徴がある。異なる分野に見られる共通の法則性を見つけることが，抽象化であり数学でもある。

4　経済学と数理科学的方法

ここで表題の二つの学問領域の関連性について，全面的な考察を行うつもりはない。単に，経済学部で統計学と線形代数学を講義するに当たって考えてきたことの一端を述べてみるだけである。全面的展開は，別の機会に譲る。

主観的経験ならば，ややこしい抽象化等の手続きなしに感覚や知覚によって捉えられるが，科学においては，何が客観的であるかという思考のふるいにかける必要がある。客観化するといっても，主観的経験の全てを客観化するのではなく，客観化可能なものを選び出すことである。先ず最初に記しておきたいことは，数理科学の方法は，具体的な対象から具体的方法によって抽象化された対象の，法則的事実を認識する手段であるという点である。従って，対象が抽象的であるだけでなく，方法もまた抽象的である。得られた「解答」はいつも厳密なものであるが，所謂，真理とは無関係のものであり，採用した具体的方法に頼って，元の複雑な対象に埋め戻して，その真理性は検証されなければならない。経済学と数学という二つの科学を関連させて考察するとき，この留意点は重要である。経済的現象を何らかの方法でモデル化し，数学的方法が役立つようにすることは，困難であるかもしれないが不可能なことではない。このとき，利用される数学的方法は，現象の本質を損なわない限り簡単明瞭なものであることが望ましい。何故なら，モデル化とは，現象を抽象化することであるが，モデルに現われる現象は単に可能性を意味する場合が少なくなく，それらがいつも現実の現象の中に発見されるとは限らないからである。ここ

で方法論上の問題は，方法と対象の弁証法である。「対象に従属して（ある程度まで）その方法は決まる」ということである。モデルの示す可能性が現実性にまで展開されるためには，具体的諸条件が現象の中に見つけ出されなければならない。現象からモデルを切り取ったときの具体的方法が重要であるのは，こうした理由からであると考えられている。

4-1 分析と総合

上で，「利用される数学的方法は，現象の本質を損なわない限り簡単明瞭なものであることが望ましい」と述べたが，これには，一見反対の立場をとる学者もいる。例えば，Schwartz（New York Univ.）は数学の実際的価値について 1）「数学には厳密性，形式的性格があるので，たとえ数学的議論が長くて複雑であっても依然として有効である。」，2）「厳密に定義された数学の形式論は，数学的推論を鍛練し，さらに推論のパターンを再現できる客観的な性格を持つ範囲内に限定するのである。」，3）「数学は，基本的な形式原理からなるきわめて小さな集合を基礎とするが，精巧に仕上げられるべき知的構造の広大な多様性を受け入れる。」と述べている（『数学者の断想』第 10 章：竹内・池永・西沢・広田訳，森北出版，1995 年）。彼の方法論を全体的に検討していないので，筆者の感想を述べるに止めるのが正当であろう。

彼も認めているように，現象の多面性のために「量的に信頼できる経済モデルの開発は簡単でないし，現在利用可能な最善のモデルといえども完全な形からはほど遠いのが現状である」。用いるモデルがそのように近似的なものであるならば，複雑な数学的手続きは，事態を一層紛糾させる可能性が大であるに違いない。さらに，現象の把握が不十分であり主要な要素と副次的偶然的要素等の分析も完了していない段階で，いきなりモデルを「開発」しても決して正しい方法ではないであろう。それは素朴な数学主義でしかない。現代科学の方法としては，はじめに具体的現象形態から

普遍的な概念（あるいは，本質）を分析し，再び普遍的なものから具体的現象形態を導き出す（総合する）必要がある。経済的現象は，経済学的方法で分析されなければならないことは言うまでもない。何故，実体とか法則とかを発見するだけでは事足りず，総合の過程（この過程は無視するのではなくとも，軽視されがちである）が必要になるかと言えば，我々が求めているものは，単なる抽象的普遍ではなく具体的現象形態の中での，概念相互間の必然的関連だからである。自然科学の中でも物理学の方法は，分析的方法で法則を発見することをもってこれで事足れりと考えていると理解されている面があるが，この理解は決して正しいものではない。例えば，気体の物理学的性質を調べるために，（単純な）分析的方法で，実体的要素として気体分子なる像に到達することができたが，気体の性質は，これらの要素間の直接あるいは間接的に働く相互作用によって，様々な現象が捉えられるのである。気体分子の集団の複雑な性質を特定の相互作用を用いて展開することが，機械論的方法と対照的な（分析的方法と弁証法的対をなす）総合の方法の目的なのである。分析的方法は，始めからこれに続く総合の方法を予定して進められると言ってもよい。現代物理学においては，要素間の相互作用の現われ方として現象の多様性を理解している。

4-2　Cournot の『富の理論の数学的原理に関する研究』について

経済学と数学的理論の二つを考察するとき，筆者にとって Cournot の『数理経済学』（中山伊知郎訳，同文館，1949 年）が大変役立った。この著書における著者の数学に対する理解の深さと，その適用範囲の把握の正確さは大いに注目されてよいと思う。彼はその序文において，「これ〔数学の公式を経済学に応用すること；引用者註〕は恐らく出発点に於いて既に，著名な理論家の非難を一身に引き受ける計画であろうと思う。〔中略〕思うにこの僻見を生んだ理由は，一方に於いては，理論に数学を応用しようと考えた少数の人々が理論を眺める観点を誤ったことに在り，他方に於いては，経済

学の問題に就いては賢明にして精通せる人々が，数学に縁遠いために此の解析に対して抱くところの誤解に基づくものである。」と切り出している。「代数的記号法を理解する者は，実用算術に於いては，その所を得ざる規則のために，多大の苦労を以てしてのみ到達せられる諸々の結果を，方程式を一見して読み取ることが出来るのである。」と述べて数学の有用性（数学的方法でしか捉えることができない法則性を見つけること）を説く。しかし，「富の理論から生ずる一般的問題の解決は，本来初等代数学に依頼するものではない。」と述べて，経済学固有の課題の重要性を指摘することを忘れていない。Cournot は，「商業の拡張及商業の方法は，事物の実際状態を益々此の抽象的概念の状態に近づける傾きがある。理論的計算は，唯この抽象的状態の上にのみ築かれ得るのである。而して，これあたかも熟練なる技師が，磨かれたる表面及正確なる運転に依って摩擦を減少しながら益々理論的状態に近づくのと同様である。」として抽象化することの重要性を強調している。

第4章『需要の法則について』において Cournot は，需要量 D を商品の価格 p の（未知の）関数 $F(p)$ であるとしてその関数形を決定する手続きを述べている。この関数形を確定することが所謂需要或いは販売の法則であると位置付けられている。しかし，「需要の法則には，列挙することも測定することもできない多数の精神的原因が影響する故に，吾々は此の法則を代数的〔数値的ということ；引用者註〕公式を以て表現し得るものとは期待し得ない。」が「未知の関数と云えども，既知の特質乃至一般的性質を持つことを妨げない。」から一定の範囲内でなら一般的関係を求めることはできるのである。Cournot のこの主張は大いに注目されなければならないと思う。何故ならば，ここに含意されていることは，観察される経済現象の階層性だからである。彼が第一に要請することは，関数 $F(p)$ は一定の範囲内では連続関数であるということである。このことの重要性は，「即ち価格の変動が原価格の小分数なる限り，需要量の変動は明白に価格

の変動に比例する」ことを既に表現しているからである。第5章「独占に就いて」では純益を表わす関数 $pF(p)-\phi(D)$ を導入する。D は $F(p)$ に等しい。$\phi'(D)$ は限界生産費に当たる。Cournot の目的は，これら二つの関数形を一般的に決定する微分方程式を見つけることである。7章以下は，得られた方程式を用いて，そこまでの展開では無視してきた重要な現象が説明される（総合の方法）。その展開方法は，表象される経済現象を抽象化して数式で表現することであるが，そこに示されたCournotの，数学適用の妥当性の把握は大変に正確である。勿論，数学の立場からすると結論自体はよく知られたものであるが，そこでの例が示しているように，ある分野で自明な結論も他の分野での重要な結論に導く場合がある点を強調しておきたい。

今日の数理経済学の中には極めて（筆者にとって）難解な数学を駆使したものがある。そこには「方程式の意味するところを一見して読み取ること」は到底不可能と思われるものが展開されている場合がある。ここで古典物理学の一つの分野である解析力学の数学的展開の歴史と，数理経済学の方法とを比較してみよう。物理学の場合には，実際に数学的に得られた結論といえども実験で常に検証される性質のものであるが，抽象的で数学的な解析力学は，応用力学に対して最も一般的原理を与えるという意味で極めて有用である。現代の解析力学は，数学の一つの分野として大変に進んだ数学概念を利用するからである。この歴史に照らしてみると，数理経済学の数学利用の哲学は，体系化の視点がどこにあるのか明瞭でなく，解析力学の場合に比較して貧弱であると言わなければならない。

5 まとめにかえて

この小論で文系学部での講義における数学論を展開してみた。「大学は大衆化した」，「最近の学生は勉強しなくなった」と言われて久しい。それ

だのに大学講義研究は，それほど進められていないというのは何故だろうか。人間は，本来的に旺盛な知的好奇心を持っているというのが，筆者の強い確信である。現代科学がものにしてきた知識の量と，学生諸君の置かれている文化状況との落差は大変に大きいものとなっている。このことのため彼等は，ややもすれば学ぶことに，たじろぎを抱くきらいがある。しかし，今日の学生諸君は，「それらを易しく説明しろ」と我々に要求する権利を持っていると思う。「易しくする」という作業が，学問論を基礎に据えて行われるならば，教える側がこのことを通じて学ぶことは多いであろう。要は，我々の側にどれだけの学問論と大学論が用意されているかである。学問とは，不可能に思われることを可能にすることであるとするならば，大学は，難しいことを易しくするところであると思う。大学で初めて講義を担当するようになって，講義の仕方を話題にした折りに，退官した先生から「理解させようと焦るな。興味を持たせればよい」とたしなめられたことがある。最近になってやっと筆者もその真意を汲み取ることができたような気がしている。

付録；等号の意味

算数と数学の違いを考えるとき，先ず等号の意味と使い方を知っておかなければならない。等号（=）とは何かといえば，次の法則を満たすもののことである；

(1)　$A=A$,

(2)　$A=B$ ならば $B=A$,

(3)　$A=B$, $B=C$ ならば $A=C$

これが同値律であるが，A，B，C が何であるかは問わない。しかし，等号の意味は A，B，C が何であるかによって異なってくるところに数学の核心が潜んでいる。例えば，

(1)　$1+1=2$，$3+1=4$，…，$9+1=10$，…

(2)　$4+5=5+4$，$2+3=5$，…

この二つの場合では，等号の意味は異なる。(1)の場合には，ある自然数の次の数を「定義」するために等号が用いられている。それゆえ，定義式である。これに対して(2)の場合には，加法の法則（交換則と結合則）を表わしている。しかもこれらは何時でも成り立っていることが経験的に確かめられたものであるから恒等式と呼ばれる。このほかに，方程式に等号が用いられる。

(3)　$y=f(x)$，$3x+2y=1$，…

自然科学中でも物理学では，本質的に以上のものとは異なる意味で等号が用いられる。代表例を挙げると

(4)　$F=ma$（Fは力，mは質量，aは加速度）

これは，Newtonの運動法則である。この式の意味するところは，「左辺にある量と右辺にある量とは数値的には等しいが，それぞれの働きは異なる」ということである。つまり，等しくないものが，ある条件のもとでは等しいとされるのである（この意味から(4)で用いる等式を条件式と呼ぶことがある)。物理学では，変化を記述するので恒等式は役に立たない。ここで大切な点は，左辺には従属変数を用い右辺には独立変数を用いることが約束されている点である。例えば，電流の法則にオームの法則というのがあり，それは「I（電流）$=V$（電圧）$/R$（抵抗）」と表わされる。実験において電流を変えて現われる電流を測定するからである。これを「$V=RI$」と書いたとすると，電流を変えたときの電圧を測定する実験を意味することになる。(4)に該当する等式を巧みに利用していく手本はMarxの『資本論』である。現代物理学には，Einsteinの関係式というのがある。それは$E=mc^2$（c；光の速さ）と書かれる。これも異なるものが等しいと置いた必要にして十分に奇妙な法則である。

〔註〕

1）　形而上学的立場からすると，専ら先験的な原理を用いて「現象は理解できた」

とする。しかし，これは「現象はかく説明される」という意味である。今日の科学では経験的に確かめられた事実の間に一般的関連性を見つけ，現象を「法則的に記述できた」ときに「分かった」という。

2)　正規分布は，誤差に関する研究から誘導されたので誤差分布とも呼ばれる。分布関数はベル型であり，指数関数で表わされる。Gauss がこの分布関数を導入したとき，「ある有限の大きさのもの以上の誤差は生起しないので，指数関数で表現された誤差分布は数学的便宜のために導入した」ことを明記して彼の理論の適用限界を明確に述べている。つまり，ある大きさの誤差のところで，不連続的にゼロとすべきところを，数学的に厳密な理論展開をするために連続関数で置き換えたのであった。にもかかわらず，今日ではこのことが忘れ去られ，仮説検定論においては，Gauss が便宜的に導入した分布関数の裾の部分が利用されている。

3)　カオスとは初期条件の精度に強く依存した時間発展のことである。この概念によって，嘗ては複雑で混乱していた考え方が物理的現実であることが理解されるようになった。

4)　数学に限ったことではないが，「この概念はどのようにして生まれたか」とか「これを利用すると何が分かるか」等の点を理解することは学問にとって大切な事柄である。数学の基礎と看做されているものは比較的少数の，しかも一定の形式のものである。この点に留意するならば，現代数学の幾つかの重要な概念も初等的数学の概念を用いて理解することは可能である。