2 国間の国際貿易を伴う景気循環モデルに関する研究ノート：4 次元の Hopf 分岐定理の適用

野崎　道哉

1. はじめに

Lorentz (1987) は，開放マクロモデルに添った動学的経済システムを検討する単純な IS-LM モデルを展開した。我々は，2 国間の国際貿易を考慮した動学的マクロモデルを，4 次元の Hopf 分岐定理を適用することによって拡張する。第 2 節では，国際貿易を伴う Kaldor-Lorentz 型景気循環モデルについて解析的に分析する。第 3 節では，本稿から得られた結論と残された課題を示す。

2. 2 国間の国際貿易を伴う景気循環モデル：解析的アプローチ

第 2 節では，Lorentz(1987;1996) によって展開された 3 国間の国際貿易モデルを 2 国モデルに集約し，4 次元の Hopf 分岐定理を用いて均衡の小域的安定性について解析的に展開する。

記号法：y_i=i 国 (i=1,2) における実質国民所得，I_i= i 国 (i=1,2) における実質投資，S_i = i 国 (i=1,2) における実質貯蓄，M_i = i 国 (i=1,2) における名目貨幣供給 (外生変数)，p_i= i 国 (i=1,2) における物価水準 (外生変数)，L_i=i 国 (i=1,2) における貨幣需要，r_i= i 国 (i=1,2) における名目利子率，π_i^e =i 国 (i=1,2) における期待インフレ率 (外生変数).

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha_1\big(I_1(y_1, r_1 - \pi_1^e) - S_1(y_1) + EX_1(y_2) - IM_1(y_1)\big), \alpha_1 > 0$$
$$I_{1_{y_1}} > 0, I_{1_{r_1}} < 0, 0 < S_{1_{y_1}} \le 0, EX_{1_{y_2}} > 0, IM_{y_1} > 0 \quad (1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \alpha_2\big(I_2(y_2, r_2 - \pi_2^e) - S_2(y_2) + EX_2(y_1) - IM_2(y_2)\big), \alpha_2 > 0$$

$$I_{2_{y_2}} > 0, I_{2_{r_2}} < 0, 0 < S_{2_{y_2}} \leq 0, EX_{2_{y_1}} > 0, IM_{2_{y_2}} > 0 \tag{2}$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \beta_1(L_1(y_1, r_1) - \overline{M_1/p_1}), \beta_1 > 0, \quad \frac{\partial L_1}{\partial y_1} > 0, \frac{\partial L_1}{\partial r_1} < 0 \tag{3}$$

$$\frac{dr_2}{dt} = \beta_2(L_2(y_2, r_2) - \overline{M_2/p_2}), \beta_2 > 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial y_2} > 0, \frac{\partial L_2}{\partial r_2} < 0 \tag{4}$$

(1) 式 は第 1 国の財・サービス市場の超過需要を表す動学方程式である。(2) 式は第 2 国の財・サービス市場の超過需要を表す動学方程式である。 (3) 式は第 1 国の貨幣市場の超過需要を表す動学方程式である。 (4) 式は第 2 国の貨幣市場の超過需要を表す動学方程式である。

(仮定１) 偏微係数の符号は以下のとおりである：

$$I_{1_{y_1}} > 0, I_{1_{r_1}} < 0, 0 < S_{1_{y_1}}, EX_{1_{y_2}} > 0, IM_{1_{y_1}} > 0$$
$$I_{2_{y_2}} > 0, I_{2_{r_2}} < 0, 0 < S_{2_{y_2}}, EX_{2_{y_1}} > 0, IM_{2_{y_2}} > 0$$
$$L_{1_{y1}} > 0,\ L_{1_{r_1}} < 0,\ L_{2_{y2}} > 0, L_{2_{r_2}} < 0$$

(仮定 2) システムにおけるすべての関数は微分可能であり，投資関数以外のすべての関数は線形で定義されている。投資関数はカルドア型の非線形性を有する関数として定義されている。

$$I_{1_{y_1 y_1}} < 0\ for\ y_1 > {y_1}^*, \text{and}\ \ I_{1_{y_1 y_1}} > 0\ for\ y_1 < {y_1}^*$$
$$I_{2_{y_2 y_2}} < 0\ for\ y_2 > {y_2}^*, \text{and}\ \ I_{2_{y_2 y_2}} > 0\ for\ y_2 < {y_2}^*$$

(仮定 3) 空間 $\{(y_1, y_2, r_1, r_2)\ |y_1>0, y_2>0, r_1>0, r_2>0\}$ における均衡 $(y_1^*, y_2^*, r_1^*, r_2^*)$ が存在する：

$$J^* = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 & J_{24} \\ J_{31} & 0 & J_{33} & 0 \\ 0 & J_{42} & 0 & J_{44} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$J_{11} = \alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}),\ J_{12} = \alpha_1 EX_{1_{y_2}} > 0, J_{13} = \alpha_1 I_{1_{r_1}} < 0,$$
$$J_{21} = \alpha_2 EX_{2_{y_1}} > 0,\ J_{22} = \alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}}),\ J_{24} = \alpha_2\ I_{2_{r_2}} < 0,$$
$$J_{31} = \beta_1\ L_{1_{y1}} > 0\ ,\ J_{33} = \beta_1\ L_{1_{r_1}} < 0,\ J_{42} = \beta_2\ L_{1_{y2}} > 0,\ J_{44} = \beta_2\ L_{2_{r_2}} < 0.$$

(仮定 4) 均衡において , すべての $a_1, a_3 > 0$ について，$(I_{1_{y1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y1}})$ と $(I_{2_{y2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y2}})$ は正であるが，十分に小さくなければならない。

Hopf 分岐定理 (存在部分)

以下の一般的なシステムを考える。

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(y, \alpha) \qquad (H)$$

そして妥当な間隔において各々 α について，一般的なシステムは分離された均衡点 $y_e = y_e(\alpha)$ を有するとしよう。($y_e(\alpha)$, α) において評価された y に関する φ のヤコビ行列が以下のような特性を持つと仮定する。

(H1) それはパラメータのクリティカルな値 α_0 において純虚数になるとき，すなわち $\theta(\alpha_0)= 0$ のとき，一組の共役複素固有値 $\theta(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ を持つ。それに対して，($y_e(\alpha_0)$, α_0) においてゼロの実部を持つ固有値がそれ以外に存在しない場合には，$\omega(\alpha) \neq 0$ である。

(H2) $\frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0$

その場合には，(H) は周期解を有する。

Hopf 分岐定理の存在部分が循環の性質について示しているので，本質的に様々な可能性が存在する。一方は，$\alpha > \alpha_0$ のとき $y_e(\alpha)$ から安定的なリミット・サイクルに向かってスパイラルな軌道が存在することである。これは，超臨界 Hopf 分岐 (supercritical Hopf bifurcation) と呼ばれている。他方は， $\alpha < \alpha_0$ のときに，すべての軌道が $y_e(\alpha)$ に向かってスパイラルな不安定なサイクルが存在するということである。これは，劣臨界 Hopf 分岐 (subcritical Hopf bifurcation) と呼ばれている。他の可能性も存在する (1)。

全ての偏微係数が均衡点において評価されているとする。我々はパラメータ β を固定する。ヤコビ行列の特性方程式 (6) は，4 次元のシステムである。4 次元のシステムにおいて，我々は Asada and Yoshida (2003) による有用な定理を用いることができる。(2)

浅田＝吉田の定理 (Asada and Yoshida ,2003)

(i) 以下のような多項方程式

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \tag{6}$$

は，もし以下の条件（A）あるいは（B）のいずれか一方が満たされている場合にのみ，1 組の純虚根および非ゼロ実部を持つ 2 根を有する：

(A) $a_1, a_3 > 0$, $a_4 \neq 0$, **and** $\Phi \equiv a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0$

(B) $a_1 = 0, a_3 = 0$, **and** $a_4 < 0$.

(ii) 多項方程式 (6) は，以下の条件の組合せ (c) が満たされている場合にのみ，1 組の純虚根および負の実部を持つ 2 根を有する：

$$\textbf{(C)}\ \ a_1>0, a_3>0, a_4>0 \ \ \text{and}\ \Phi \equiv a_1a_2a_3 - {a_1}^2a_4 - {a_3}^2 = 0$$

ここで，

$a_1 = -trace\ \mathbf{J^*} = -J_{11} - J_{22} - J_{33} - J_{44} = -\alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}) - \alpha_2(I_{2_{y_2}}S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})$

$-\beta_1 L_{1_{r_1}} - \beta_2 L_{2_{r_2}} > 0$　(仮定 **4** より)

$a_2 = \boldsymbol{F_{12}}^* + \boldsymbol{F_{13}}^* + \boldsymbol{F_{14}}^* + \boldsymbol{F_{23}}^* + \boldsymbol{F_{24}}^* + \boldsymbol{F_{34}}^*$

$= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} - J_{13}J_{21} + J_{11}J_{24} + J_{11}J_{32} - J_{12}J_{31} + J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31} + J_{11}J_{42} - J_{12}J_{41} - J_{13}J_{41}$
$+ J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31} - J_{24}J_{31} + J_{21}J_{42} - J_{22}J_{41} + J_{21}J_{44} - J_{24}J_{41} + J_{31}J_{42} - J_{32}J_{41} - J_{33}J_{41} + J_{31}J_{44}$
$= \alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}})\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}}) - \alpha_1 EX_{1_{y_2}}\alpha_2 EX_{2_{y_1}} - \alpha_1 I_{1_{r_1}}\alpha_2 EX_{2_{y_1}} +$
$\alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}})\alpha_2 I_{2_{r_2}} - \alpha_1 EX_{1_{y_2}}\beta_1 L_{1_{y1}} + \alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}})\beta_1 L_{1_{r_1}} -$
$\alpha_1 I_{1_{r_1}}\beta_1 L_{1_{y1}} + \alpha_1\beta_2 L_{1_{y2}}(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}) - \alpha_2\beta_1 L_{1_{y1}}(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}}) -$
$\alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{y1}} + \alpha_2 EX_{2_{y_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} + \beta_1 L_{1_{y1}}\beta_2 L_{1_{y2}} + \beta_1 L_{1_{y1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}$

$$a_3 = -\begin{vmatrix} J_{22} & 0 & J_{24} \\ 0 & J_{33} & 0 \\ J_{42} & 0 & J_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} & 0 \\ J_{31} & J_{33} & 0 \\ 0 & 0 & J_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ 0 & J_{22} & J_{24} \\ 0 & J_{42} & J_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ 0 & J_{22} & 0 \\ J_{31} & 0 & J_{33} \end{vmatrix}$$

$= -\{J_{22}J_{33}J_{44} - J_{24}J_{33}J_{42}\} - \{J_{11}J_{33}J_{44} - J_{13}J_{31}J_{44}\} - \{J_{11}J_{22}J_{44} - J_{11}J_{24}J_{42}\}$
$-\{J_{11}J_{22}J_{33} - J_{13}J_{22}J_{31}\}$
$= -\{\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{1_{y2}}\}$

$-\{\alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_1 I_{1_{r_1}}\beta_1 L_{1_{y1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}\}$

$-\{\alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}})\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} -$

$IM_{1_{y_1}})\alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_2 L_{1_{y2}}\} - \{\alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})$

$\beta_1 L_{1_{r_1}} - \alpha_1 I_{1_{r_1}}\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{y1}}\} > 0$　(仮定４より)

$a_4 = det\ \mathbf{J^*} = J_{11}J_{22}J_{33}J_{44} - J_{11}J_{24}J_{33}J_{42} - J_{12}J_{21}J_{33}J_{44}$
$-J_{13}J_{21}J_{32}J_{44} - J_{13}J_{22}J_{31}J_{44} + J_{13}J_{24}J_{31}J_{42} + J_{12}J_{24}J_{33}J_{41} - J_{13}J_{24}J_{32}J_{41}$
$= \alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}})\alpha_2(I_{2_{y_2}}S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_1(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} -$
$IM_{1_{y_1}})\alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{1_{y2}} - \alpha_1 EX_{1_{y_2}}\alpha_2 EX_{2_{y_1}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_1 I_{1_{r_1}}\alpha_2(I_{2_{y_2}}S_{2y2} -$

$IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{y1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} < 0$　(仮定４より)

a_1, a_2, a_3 および a_4 は，各々 α_1, α_2，β_1，β_2の関数である。

パラメータが変化して均衡が失われるとき，Hopf 分岐が生じる。

命題 1. (仮定 1) 〜 (仮定 4) の下で，もしパラメータ α が分岐値に近接しているならば，$\alpha_1 > \alpha_{10}$, $\alpha_2 > \alpha_{20}$ あるいは $\alpha_1 < \alpha_{10}$, $\alpha_2 < \alpha_{20}$ の場合には，動学体系 (1) − (4) の均衡の周りで少なくとも 1 つの閉軌道が存在する。

(証明)

動学体系の小域的安定性を証明する際に，非常に有用な定理は Routh-Hurwitz の定理である。4 次元の場合において，もし $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ および $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0$ ならば，固有値の実部が負であるということが示される。もし $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ および $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0$ であり，共役複素根の実部がゼロであることが示されるならば，ゼロに同値である実根は存在しない。

次に，α を分岐パラメータとして想定し, Routh-Hurwitz 条件が満たされる初期値を仮定する。(仮定４) によって，α の限界的増加は a_1 における限界的減少を意味する。

$$\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} = -\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right) < 0,$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_2} = -\left(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}}\right) < 0$$

さらに，α の限界的増加は a_3 の限界的増加に導く。

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_3}{\partial \alpha_1} = & -\{\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{1_{y2}}\} \\ & -\{\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - I_{1_{r_1}}\beta_1 L_{1_{y1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}\} \\ & -\{\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\alpha_2 (I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_2 L_{2_{r_2}} - \left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_2 L_{1_{y2}}\} \\ & -\{\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{r_1}} - \alpha_2(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{y1}}\} > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_3}{\partial \alpha_2} = & -\{(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{1_{y2}}\} \\ & -\{\alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_1 I_{1_{r_1}}\beta_1 L_{1_{y1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}\} \\ & -\{\alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_2 L_{2_{r_2}} - \alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right) I_{2_{r_2}}\beta_2 L_{1_{y2}}\} \\ & -\{\alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{r_1}} - \alpha_1 I_{1_{r_1}}(I_{2_{y_2}} - S_{2y2} - IM_{2_{y_2}})\beta_1 L_{1_{y1}}\} > 0\end{aligned}$$

$\frac{\partial a_4}{\partial \alpha_1}$ = $\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)\alpha_2$ ($I_{2_{y_2}}S_{2y2} - IM_{2_{y_2}}$) $\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}$ − ($I_{1_{y_1}} - S_{1y1} -$ $IM_{1_{y_1}})\,\alpha_2 I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{1y2}$ − $EX_{1_{y_2}}\alpha_2 EX_{2_{y_1}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}$ − $I_{1_{r_1}}\alpha_2$ ($I_{2_{y_2}}S_{2y2} -$ $IM_{2_{y_2}})\,\beta_1 L_{1y1}\beta_2 L_{2_{r_2}} < 0$

$\frac{\partial a_4}{\partial \alpha_2}$ = $\alpha_1\left(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} - IM_{1_{y_1}}\right)$ ($I_{2_{y_2}}S_{2y2} - IM_{2_{y_2}}$) $\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}$ − $\alpha_1\Big(I_{1_{y_1}} - S_{1y1} -$ $IM_{1_{y_1}}\Big)\,I_{2_{r_2}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{1y2}$ − $\alpha_1 EX_{1_{y_2}}EX_{2_{y_1}}\beta_1 L_{1_{r_1}}\beta_2 L_{2_{r_2}}$ − $\alpha_1 I_{1_{r_1}}$ ($I_{2_{y_2}}S_{2y2} -$ $IM_{2_{y_2}})\,\beta_1 L_{1y1}\beta_2 L_{2_{r_2}} < 0$

$\partial a_2/_{\partial\alpha}$ の符号は曖昧であるが，分岐値 α_0 の存在は，$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0$ の論理的な帰結とともに表れざるを得ない。

(5) 式のヤコビ行列式は，分岐値 α_{10}, α_{20} において 1 組の純虚固有値を持ち，ゼロの実部を持つ固有値は存在しない。
$\alpha_1 > \alpha_{10}$, $\alpha_2 > \alpha_{20}$ について，$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2$ は負である。その場合には，$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2$ を保証する共役複素根 $\lambda(\alpha_0)$ は、$\lambda(\alpha_0) + \lambda(\overline{\alpha_0})$ =0 になりえない。
その場合には，$\alpha_1 < \alpha_0$ について，1 組の共役複素根の実部は非ゼロである。$\alpha_1 < \alpha_{10}$, $\alpha_2 < \alpha_{20}$ において閉軌道が生じる場合は，劣臨界ケースと呼ばれる。この場合には閉軌道は安定的な不動点を包摂し，軌道は反発する。均衡は $\alpha > \alpha_0$ において不安定になり，閉軌道は存在しない。その場合に，(仮定 1) ～ (仮定 4) の下で，もしパラメータ α が分岐値に近接しているならば，$\alpha_1 > \alpha_{10}$, $\alpha_2 > \alpha_{20}$ あるいは $\alpha_1 < \alpha_{10}$, $\alpha_2 < \alpha_{20}$ の場合には，動学体系 (1) − (4) の均衡の周りで少なくとも 1 つの閉軌道が存在する。 □

3. 結論と今後の課題

本稿では，2 国間の国際貿易を伴う Kaldor − Lorentz 型の景気循環モデルを，4 次元の Hopf 分岐定理を適用することによって展開した。各々の国に関して，(i) 国際貿易を伴う財・サービス市場の超過需要を表す動学方程式，および (ii) 貨幣市場の超過需要を表す動学方程式の 2 次元の動学方程式体系を展開し，2 次元× 2 国の 4 次元の動学方程式体系を分析した。
我々は単純化のために，何らかの外生的な理由によって，第 1 国の実質国民所得が均衡水準よりも減少する場合を考える。第 1 国の実質国民所得の減少は，第 1 国の投資需要，貯蓄を減少させ，第 1 国の輸入を減少させる。更に，第 1 国の実質国民所得の減少は第 1 国の貨幣需要を減少させ，第 1 国の利子率を低下させる。第 1 国の輸入の減少は，第 2 国の輸出を減少させ，第 2 国の実質国民所得を減少させる。第 2 国の実質国民所得の減少は，第 2 国の投資需要，貯蓄を減少させ，

第 2 国の輸入を減少させせる。第 1 国の利子率の低下は，第 1 国の投資需要，貯蓄を増加させ，第 1 国の輸入を増加させせる。第 1 国の輸入の増加は，第 2 国の輸出を増加させ，第 2 国の実質国民所得を増加させせる。第 2 国の実質国民所得の増加により，第 1 国の輸出も増加し，第 1 国の実質国民所得は増加する。何らかの外生的な理由によって，第 1 国の実質国民所得が均衡水準よりも増加する場合についても同様に考察できる。

今後の課題として，国際貿易を伴う 2 国間の景気循環モデルの解析的アプローチをふまえて，数値シミュレーション分析を展開することである。

〔注〕

(1) G. Gandolfo(2009), p.481.

(2) Ibid., pp.481-482.

〔参考文献〕

浅田統一郎 (1997),『成長と循環のマクロ動学』, 日本経済評論社 .

Asada, T. and Yoshida, H. (2003), "Coefficient criterion for Four-dimensional Hopf bifurcations: A complete mathematical characterization and applications to economic dynamics," Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 18: 525-536.

Davidson, P. (2006) "Can, or Should, a Central Bank Inflation Target?" Journal of Post Keynesian Economics, Vol.28, No.4:689-703.

Dos Santos, A. L. M. (2011-12) "Inflation targeting in a Post Keynesian economy," Journal of Post Keynesian Economics, Vol.34, No. 2 :295-318

Franke, R. and Asada, T. (1994) "A Keynes-Goodwin model of the business cycle," Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 24: 273-295.

Gandolfo, G, (1996) Economic Dynamics, Springer.

Kaldor, N. (1940) "A Model of the Trade Cycle." Economic Journal, Vol. 50: 78-92.

Kaldor, N. (1955-56) "Alternative Theories of Distribution," Review of Economic Studies, Vol.23, 94-100.

Lima, G.T. and Setterfield, M. (2008), "Inflation Targeting and Macroeconomic Stability in a Post Keynesian Economy," Journal of Post Keynesian Economics, Vol. 30, No.3: 435-461.

Lorentz, H-W. (1987) "International Trade and the Possible Occurrence of Chaos," Economic Letters, Vol.23: 135-138.

----(1997) Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion, Springer.

Minsky, H.P. (1975), John Maynard Keynes, Columbia University Press.

----(1982), Can 'it ' Happen Again ?, M.E. Sharpe.

----(1986), Stabilizing an Unstable Economy, Columbia University Press.

Nagatani, K. (1981), Economic Dynamics, Cambridge University Press.

Nozaki, M. (1999) "Money, Government and Adaptive Expectation in Business Cycle Theory," Journal of Policy Studies (Sougou Seisaku Kenkyu), Vol.1, No.1 : 91-99.

Palley, T. (1994) "Debt, aggregate demand, and the business cycle: an analysis in the spirit of Kaldor and Minsky," Journal of Post Keynesian Economics, Vol. 16, No.3:371-390

----(1997), "Endogenous Money and the Business Cycle," Journal of Economics, Vol.65, No.2 : 133-149.

Sasakura, K. (1994) "On the Dynamic Behavior of Schinasi' s Business Cycle Model," Journal of Macroeconomics, Vol. 16 : 423-444.

Setterfield, M. (2006), "Is Inflation Targeting Compatible with Post Keynesian Economics?" Journal of Post Keynesian Economics, Vol.28, No.4:653-671.

Schinasi, G.J. (1981) "A Nonlinear Dynamic Model of Short Run Fluctuations," Review of Economic Studies, Vol.48:

649-656.
Schinasi, G.J. (1982), “Fluctuations in a Dynamic, Intermediate-run IS-LM Model: Applications of Poincare-Bendixson Theorem,” Journal of Economic Theory, Vol. 28: 369-375.
Torre, V. (1977) “Existence of Limit Cycles and Control in Complete Keynesian Systems by Theory of Bifurcations,” Econometrica, Vol.45 :1457-1466.
Yoshida, H. and Asada, T. (2007) “Dynamic Analysis of policy-lag in a Keynes-Goodwin model: Stability, instability, cycles and chaos,” Journal of Economic Behavior and Organization, Vol.62: 441-469.